

**M1 – Mathématiques**  
**Algèbre & Géométrie**

TD 4 : GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Dans cette feuille,  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ , et  $\mathbb{P} := \mathbb{P}(E)$  est son espace projectif associé.

**Exercice 1.** Soit  $F, G \subset E$  deux sous-espaces vectoriels et  $\mathbb{P}(F), \mathbb{P}(G) \subset \mathbb{P}$  les sous-espaces projectifs associés. Interpréter vectoriellement sur  $F$  et  $G$  les propriétés projectives suivantes :

1.  $\mathbb{P}(F)$  et  $\mathbb{P}(G)$  sont disjoints ;
2.  $\mathbb{P}(F)$  et  $\mathbb{P}(G)$  se coupent en un unique point ;
3.  $\mathbb{P}(F)$  et  $\mathbb{P}(G)$  sont disjoints et engendrent  $\mathbb{P}$ .

**Exercice 2.** Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps fini à  $q$  éléments. Montrer que tout espace projectif de dimension  $n$  sur  $\mathbb{F}_q$  possède  $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 + q + \dots + q^n$  éléments.

**Exercice 3.** On suppose  $n \geq 2$ . Soit  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{P}$  des points distincts tels que les droites projectives  $(a_1a_2)$ ,  $(b_1b_2)$  et  $(c_1c_2)$  soient concourantes en un point  $o \in \mathbb{P}$ .

1. Montrer  $a_1, a_2, o$  (resp.  $b_1, b_2, o$  et  $c_1, c_2, o$ ) est un repère projectif pour  $(a_1a_2)$  (resp.  $(b_1b_2)$ ,  $(c_1c_2)$ ).
2. Montrer qu'il existe  $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z \in E$  des antécédents par  $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$  de, respectivement,  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, o \in \partial(E)$  tels que  $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = z$ .
3. Montrer que  $\pi(u_1 - v_1) \in (a_1b_1) \cap (a_2b_2)$ ,  $\pi(v_1 - w_1) \in (b_1c_1) \cap (b_2c_2)$  et  $\pi(w_1 - u_1) \in (c_1a_1) \cap (c_2a_2)$ .
4. Montrer le théorème de Désargues.

**Exercice 4.** Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{P}$  des points distincts et  $p_{ab}, p_{bc}, p_{cd}, p_{da} \in \partial(E)$  des points situés respectivement sur  $(ab)$ ,  $(bc)$ ,  $(cd)$  et  $(da)$ . Montrer que si  $(p_{ab}p_{bc}) \cap (p_{cd}p_{da})$  est un point situé sur  $(ac)$  si et seulement si  $(p_{ab}p_{da}) \cap (p_{bc}p_{cd})$  est un point situé sur  $(bd)$ .

**Exercice 5.** Dans un plan euclidien  $\mathcal{P}$ , on considère un triangle  $a, b, c$ . On note  $a'$  le pied de la hauteur issue de  $a$ ,  $d_{a'}$  (resp.  $d'_{a'}$ ) la droite perpendiculaire à  $(ab)$  (resp.  $(ac)$ ) passant par  $a'$ , et  $d_{(bc)}$  (resp.  $d'_{(bc)}$ ) la droite perpendiculaire à  $(bc)$  passant par  $b$  (resp.  $c$ ).

1. Montrer que  $d_{a'}$  et  $d_{(bc)}$  (resp.  $d'_{a'}$  et  $d'_{(bc)}$ ) se coupent en un point que l'on note  $p$  (resp.  $p'$ ).
2. Montrer que  $p$  et  $p'$  sont alignés avec l'orthocentre du triangle  $a, b, c$ .

**Exercice 6.** Soit  $a, b, c \in \mathbb{P}$  trois points distincts et  $d$  une droite projective qui coupe, respectivement,  $(ab)$ ,  $(bc)$  et  $(ca)$  en  $c'$ ,  $a'$  et  $b'$ .

1. Montrer que les droites  $(aa')$  et  $(bb')$  (resp.  $(bb')$  et  $(cc')$ ,  $(cc')$  et  $(aa')$ ) se coupent en un point que l'on note  $c''$  (resp.  $a''$ ,  $b''$ ).
2. Montrer que les droites  $(aa'')$ ,  $(bb'')$  et  $(cc'')$  sont concourantes.

**Exercice 7.** Dans un plan affine  $\mathcal{P}$ , on considère un triangle  $a, b, c$ . On fixe  $e \in (ab)$  et  $f \in (ac)$ .

1. Montrer que la droite  $(ac)$  (resp.  $(ab)$ ) coupe la parallèle à  $(bf)$  passant par  $e$  (resp. parallèle à  $(ce)$  passant par  $f$ ) en un point que l'on note  $e'$  (resp.  $f'$ ).

2. Montrer que la droite  $(e'f')$  est parallèle à  $(bc)$ .

**Exercice 8.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n \in \mathbb{N}$  dirigé par un espace vectoriel  $E$ . On appelle *champ de vecteur* toute application de  $\mathcal{E}$  dans  $E$ . On dit qu'un champ de vecteur est *radial* s'il est de la forme

$$r_{o,\lambda}: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \overrightarrow{ox} \end{array},$$

avec  $o \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . On note  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$  l'ensemble des champs de vecteurs radiaux et  $C(\mathcal{E})$  l'ensemble des champs de vecteurs constants.

1. Montrer que la structure vectoriel de  $E$  induit naturellement une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des champs de vecteurs, que  $C(\mathcal{E})$  est un sous-espace vectoriel isomorphe à  $E$ , et que  $\widehat{\mathcal{E}} := \mathcal{R}(\mathcal{E}) \cup C(\mathcal{E})$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .
2. Montrer que l'application  $f: \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $f(r_{o,\lambda}) = \lambda$  et  $f_{C(\mathcal{E})} \equiv 0$  est une forme linéaire.
3. Montrer que l'application  $\varphi: \mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  définie par  $\varphi(r_{o,\lambda}) = o$  induit une isomorphisme d'espace affine entre  $\mathcal{E}$  et  $f^{-1}(1)$ .
4. Donner une complétion projective "canonique" de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire ne nécessitant pas le choix d'une origine arbitraire pour  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 9.** On suppose que  $\mathbb{P}$  est un plan projectif. Pour toutes droites projectives distinctes  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{P}$  et tout point  $s \in \mathbb{P} \setminus (\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2)$ , on définit la *perspective de centre  $s$  (entre  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$ )* comme l'application  $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}: \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  qui à  $x \in \mathbb{D}_1$  associe l'intersection de  $\mathbb{D}_2$  avec  $(sx)$ .

1. (a) Montrer que toute perspective entre  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  est une homographie fixant l'intersection de  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$ .  
(b) Montrer que toute homographie entre deux droites projectives de  $\mathbb{P}$  fixant leur intersection est une perspective.
2. Soit  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{P}$  des points distincts tels que les droites projectives  $(a_1a_2)$ ,  $(b_1b_2)$  et  $(c_1c_2)$  soient concourantes en un point  $o \in \mathbb{P}$ . On note

$$a' := (b_1c_1) \cap (b_2c_2) \quad b' := (c_1a_1) \cap (c_2a_2) \quad c' := (a_1b_1) \cap (a_2b_2).$$

- (a) Montrer que  $f_{(a_1a_2), (c_1c_2), b'}$  la composé des perspectives  $f_{(a_1a_2), (b_1b_2), c'}$  et  $f_{(b_1b_2), (c_1c_2), a'}$ .
- (b) On note  $m := (a_1a_2) \cap (b'c')$ . Montrer que  $f_{(a_1a_2), (c_1c_2), b'}(m)$  est sur  $(a'c')$ .
- (c) En déduire le théorème de Désargues, c'est-à-dire que  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  sont alignés.
3. Soit  $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}$  une perspective. Montrer qu'il existe une droite  $\mathbb{D}$  concourante à  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  telle que, pour tous points  $a \neq b \in \mathbb{D}_1$ , les droites  $(af_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}(b))$  et  $(bf_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}(a))$  se coupent en un point de  $\mathbb{D}$ . La droite  $\mathbb{D}$  est appelée *axe de  $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}$* .
4. Soit  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  deux droites distinctes de  $\mathbb{P}$  se coupant en un point  $o$ . Soit  $f: \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  une homographie qui ne fixe pas  $o$ . Montrer que, pour tous points  $a \neq b \in \mathbb{D}_1$ , les droites  $(af(b))$  et  $(bf(a))$  se coupent en un point de  $(f(o)f^{-1}(o))$ . La droite  $(f(o)f^{-1}(o))$  est appelée *axe de  $f$* .
5. Montrer que toute homographie entre deux droites de  $\mathbb{P}$  s'écrit comme composé de deux perspectives.
6. A l'aide de l'axe d'une homographie, montrer le théorème de Pappus.

**Exercice 10.** Enoncer les théorèmes duaux des théorèmes de Désargues et Pappus.

**Exercice 11.** On suppose que  $\mathbb{P}$  est une droite projective. Soit  $f \in \text{PGL}(E)$  une homographie de  $\mathbb{P}$  distincte de l'identité.

1. (a) Montrer que  $f$  ne peut pas posséder trois points fixes distincts.  
 (b) Montrer que, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $f$  admet au moins un point fixe.  
 (c) Montrer que, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $f$  peut effectivement admettre 0, 1 ou 2 points fixes.
2. Montrer que, en coordonnées homogènes dans un repère projectif<sup>1</sup>,  $f$  est de la forme  $(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d})$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ .
3. On fixe une carte affine  $\pi_{\mathcal{H}}$  pour  $\mathbb{P}$ .  
 (a) Montrer que  $f$  a exactement 1 point fixe si et seulement si elle est conjuguée, dans le groupe des homographies, à une homographie qui, restreinte à la carte  $\pi_{\mathcal{H}}$ , est une translation.  
 (b) Montrer que  $f$  a exactement 2 points fixes si et seulement si elle est conjuguée, dans le groupe des homographies, à une homographie qui, restreinte à la carte  $\pi_{\mathcal{H}}$ , est une homothétie. Calculer, dans ce cas, le birapport  $[a, b, x, f(x)]$  où  $a$  et  $b$  sont les deux points fixes, et  $x$  un point quelconque distinct de  $a$  et  $b$ .
4. (a) Montrer que  $f$  est une involution si et seulement si il existe  $x \in \mathbb{P}$  tel que  $f(x) \neq x$  et  $f^2(x) = x$ .  
 (b) On suppose que  $f$  possède deux points fixes  $a \neq b \in \mathbb{P}$ . Montrer que  $f$  est une involution si et seulement si il existe  $x \in \mathbb{P} \setminus \{a, b\}$  tel que  $[a, b, x, f(x)] = -1$ .  
 (c) On suppose que  $f$  est une involution.  
 i. Montrer que, en coordonnées homogènes dans un repère projectif<sup>1</sup>,  $f$  est de la forme  $(x \mapsto \frac{\lambda}{x})$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .  
 ii. Montrer que, sur  $\mathbb{C}$ , une involution a nécessairement deux points fixes, mais que sur  $\mathbb{R}$ , elle peut n'en avoir aucun.  
 iii. Montrer que deux homographies de la forme  $(x \mapsto \frac{\lambda_1}{x})$  et  $(x \mapsto \frac{\lambda_2}{x})$  sur  $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ , avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^*$ , sont conjugués si et seulement si  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est un carré dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 12.** On dit que quatre points  $a, b, c, d$  d'une droite projective forment une *division harmonique*<sup>2</sup> si le birapport  $[a, b, c, d]$  vaut  $-1$ .

1. Si  $a, b, c$  sont dans une carte affine et que  $\mathbb{K}$  est de caractéristique différente de 2, montrer que  $a, b, c$  et  $\infty$  forment une division harmonique ssi  $c$  est le milieu de  $a$  et  $b$ .
2. Si  $a, b, c, d$  sont dans une carte affine et que l'on note, respectivement,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$  leurs coordonnées dans un repère donné, alors  $a, b, c, d$  forment une division harmonique ssi  $\alpha\beta + \gamma\delta = \frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}$ .
3. Si  $a, b, c, d$  sont dans une carte affine et que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , montrer  $a, b, c, d$  forment une division harmonique ssi  $\overline{oc} \cdot \overline{od} = \overline{oa}^2$  avec  $o$  le milieu de  $a$  et  $b$ .
4. Si  $a, b, c, d$  sont dans une carte affine et que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , montrer  $a, b, c, d$  forment une division harmonique ssi  $\frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad}$ .
5. Soit  $a, b, c, d$  un repère projectif d'un plan projectif. On note

$$b' := (ab) \cap (cd) \quad c' := (ac) \cap (bd) \quad d' := (ad) \cap (bc) \quad b'' := (ab) \cap (c'd').$$

Montrer que  $a, b, b', b''$  forment une division harmonique.

**Exercice 13.** Soit  $\rho := [a, b, c, d]$  un birapport de quatre points d'une droite projective en position générale. Déterminer, en fonction de  $\rho$ , tous les birapports obtenus en permutant l'ordre des points  $a, b, c, d$ .

1. en identifiant  $[a : b]$  avec  $\frac{a}{b} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

2. on dit aussi que  $a$  et  $b$  sont conjugués par rapport à  $c$  et  $d$