Université Aix-Marseille	2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

Examen terminal
12 janvier 2017

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner les définitions :
   (a) de deux matrices congruentes ;
   (b) d'un sous-espace affine engendré par une partie ;
   (c) des coordonnées projectives dans un repère (ou base) projectif donné.
2. Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$, on a $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
3. Montrer que deux applications linéaires injectives ont le même projectivisé si et seulement si elles sont colinéaires.
4. Montrer que tout espace projectif de dimension $n \in \mathbb{N}$ sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ possède $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ éléments.

Exercice 2. (4 points)

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{P}$ une base projective d'un plan projectif $\mathbb{P}$. On note $a' = (bc) \cap (ad)$, $b' = (ac) \cap (bd)$ et $c' = (ab) \cap (cd)$, puis $a'' = (bb') \cap (cc')$, $b'' = (cc') \cap (aa')$ et $c'' = (aa') \cap (bb')$.
   (a) Justifier l'existence de a', b', c', a'', b'' et c''.
   (b) Montrer que a'', b'' et c'' sont alignés.
2. Enoncer le théorème dual de la question précédente.

Exercice 3. (7 points) Soit $\mathbb{D}$ une droite projective.

1. (a) Montrer que, pour tous $a \neq b \in \mathbb{D}$ et tous $c, d \in \mathbb{D} \setminus \{a, b\}$, on a $[a, b, c, d] = [b, a, d, c]$.
   (b) Soit $x_0 \in \mathbb{D}$ et $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une homographie telle que $f^2(x_0) = x_0$ mais $x_0 \notin \mathrm{Fix}(f)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{D} \setminus \{x_0, f(x_0)\}$, on a $\left[x_0, f(x_0), f(x), f^2(x)\right] = \left[x_0, f(x_0), f(x), x\right]$.
   (c) Montrer qu'une homographie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une involution [1] si et seulement si il existe $x_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ tel que $f^2(x_0) = x_0$.
2. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une homographie possédant au moins 3 points fixes. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$.
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{D}$ une base projective de $\mathbb{D}$ et $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une homographie telle que $a, b \notin \mathrm{Fix}(f)$ et $b \neq f(a)$.
   (a) Justifier l'existence d'uniques homographies $i, j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telles que
      - $i(a) = f(b)$, $i(b) = f(a)$ et $i(f(a)) = b$;
      - $j(f(a)) = f(b)$, $j(f(b)) = f(a)$ et $j(i(c)) = f(c)$
   (b) Montrer que i et j sont des involutions et que $f = j \circ i$.
4. Montrer que toute homographie de $\mathbb{D}$ est soit une involution soit le produit de deux involutions.

TSVP ⇒

1. càd $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ mais $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$

Exercice 4. (8 points) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé. On note $\mathrm{Quad}(E)$ l'espace vectoriel formé par les formes quadratiques sur E.

Dans tout ce qui suit, et de manière abusive, π sera l'application qui envoie un élément non nul x sur la droite $\mathbb{K}.x$ engendrée par cet élément, l'espace vectoriel de départ et l'espace projectif d'arrivée variant selon la nature de x.

1. Montrer que si $x \in E$ est dans le cône isotrope de $q \in \mathrm{Quad}(E)$, alors $\mathbb{K}.x \subset \mathrm{Cone}(q)$.
2. Montrer que si $q_1, q_2 \in \mathrm{Quad}(E) \setminus \{0\}$ sont colinéaires, alors $\mathrm{Cone}(q_1) = \mathrm{Cone}(q_2)$ et $\mathrm{rg}(q_1) = \mathrm{rg}(q_2)$.
3. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que dire des signatures de q_1 et q_2 lorsque $q_1, q_2 \in \mathrm{Quad}(E) \setminus \{0\}$ sont colinéaires ?

On appelle *quadrique* de $\mathbb{P}(E)$ tout élément de $\mathbb{Q}\mathrm{uad}(E) := \mathbb{P}\big(\mathrm{Quad}(E)\big)$. Pour tout élément $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$, on appelle

- *équation de Q* tout élément $q \in \mathrm{Quad}(E) \setminus \{0\}$ tel que $\pi(q) = Q$;
- *image de Q* l'ensemble $\pi\big(\mathrm{Cone}(q)\big) \subset \mathbb{P}(E)$, où q est une équation de Q.

4. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas $E = \mathbb{R}^3$.
   (a) Soit $q_1 \in \mathrm{Quad}(E)$ définie par $q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x^3$.
      i. Déterminer le rang et la signature de q_1.
      ii. On note $Q_1 \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ la quadrique dont q_1 est une équation. Tracer l'image de Q_1 restreinte
         - à la carte affine $x_1 = 1$;
         - à la carte affine $x_3 = 1$.

   (b) Soit $q_2 \in \mathrm{Quad}(E)$ définie par $q_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$.
      i. Déterminer le rang et la signature de q_1.
      ii. On note $Q_2 \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ la quadrique dont q_2 est une équation. Tracer l'image de Q_2 restreinte
         - à la carte affine $x_1 = 1$;
         - à la carte affine $x_3 = 1$.
5. Montrer que l'application
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Quad}(E)\big) \\ f & \longmapsto & q \mapsto q \circ f \end{array}$$
   est un morphisme de groupes.
6. Montrer que ψ induit une action $\big((f, Q) \mapsto f.Q\big)$ du groupe $\mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$ des homographies de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$.
7. Soit $C \subset \mathbb{P}(E)$ l'image d'une quadrique $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$. Montrer que, pour toute homographie $f \in \mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$, $f(C)$ est l'image de $f.Q$.

On dit que deux quadriques $Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ sont *équivalentes* si elles sont sur la même orbite pour l'action de $\mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$, c'est-à-dire si il existe une homographie $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ telle que $Q_2 = f.Q_1$.

8. Rappeler la classification des formes quadratiques pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
9. En déduire une classification des quadriques pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.