Université Aix-Marseille 2016–2017

M1 – Mathématiques
Algèbre & Géométrie

Examen terminal
corrigé

Exercice 1.

1. (a) On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *congruentes* si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^t AP$.

   (b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$ non vide, on appelle *sous-espace affine engendré par X* l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant X.

   (c) Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1 \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E)$ son espace projectif associé et $\mathcal{B} := x_0, \ldots, x_{n+1}$ une base projective de $\mathbb{P}(E)$. On note $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la projection canonique. On appelle *coordonnées projectives de $x \in \mathbb{P}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$* les coordonnées homogènes, c'est-à-dire à multiplication global par un scalaire près, d'un antécédent par π de x dans $E \setminus \{0\}$ dans une base $e_0, \ldots, e_n$ de E telle que $\pi(e_i) = x_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et $\pi(e_0 + \cdots + e_n) = x_{n+1}$.

2. On procède par double inclusion et on note $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ le produit scalaire sur E.
   Si $u_0 \in (F+G)^\perp$, alors pour tout $v \in F$, on a $v = v + 0 \in F + G$ et donc $\langle u_0, v\rangle = 0$. On en déduit que $u_0 \in F^\perp$. De même $u_0 \in G^\perp$, et donc $u_0 \in F^\perp \cap G^\perp$.
   Réciproquement, si $u_0 \in F^\perp \cap G^\perp$, alors pour tout $v \in F + G$ il existe $v_F \in F$ et $v_G \in G$ tels que $v = v_F + v_G$. Mais alors $\langle u_0, v\rangle = \langle u_0, v_F\rangle + \langle u_0, v_G\rangle = 0$ et donc $u_0 \in (F+G)^\perp$.

3. Soit E, F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et $f, g : E \to F$ deux applications linéaires injectives.
   Si $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $g(u) = \lambda f(u)$ et donc $P(g)(\mathbb{K}.u) = P(f)(\mathbb{K}.u)$. Les deux projectivisés sont donc égaux.
   Réciproquement, si $P(g) = P(f)$, alors pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}^*$ tel que $g(u) = \lambda_u f(u)$. Montrons que λ_u ne dépend pas de u. Pour cela, on fixe $u, v \in E \setminus \{0\}$. Si $v = \mu u$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$, alors

   $$\lambda_v f(v) = g(v) = g(\mu u) = \mu g(u) = \mu\lambda_u f(u) = \lambda_u f(\mu u) = \lambda_u f(v)\ ;$$

   or $f(v) \neq 0$ car f est injective, donc $\lambda_v = \lambda_u$. Sinon, u et v sont linéairement indépendants et comme f est injective, $f(u)$ et $f(v)$ le sont aussi ; on a alors

   $$\lambda_u f(u) + \lambda_v f(v) = g(u) + g(v) = g(u+v) = \lambda_{u+v} f(u+v) = \lambda_{u+v} f(u) + \lambda_{u+v} f(v),$$

   ce qui implique que $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$. Au final, on a bien $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

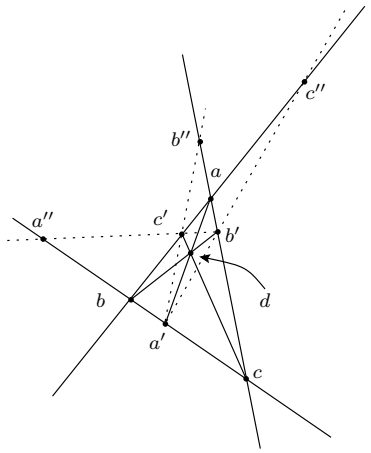
4. Soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension n sur $\mathbb{F}_q$ et E l'espace vectoriel (de dimension $n+1 \in \mathbb{N}$) sous-jacent. Tout choix de base induit un isomorphisme entre E et $\mathbb{F}_q^{n+1}$; on en déduit que E a q^{n+1} éléments et donc que $E \setminus \{0\}$ en a $q^{n+1} - 1$. Par ailleurs, deux droites vectorielles distinctes n'ont que 0 en commun. L'ensemble des droites vectorielles de E induisent donc une partition de $E \setminus \{0\}$. Les classes de cette partition sont en bijection avec $\mathbb{P}(E)$ et, l'application

   $$\xi : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^* & \longrightarrow & \mathbb{F}_q.u_0 \setminus \{0\} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda u_0 \end{array}$$

   étant bijective pour tout $u_0 \in E \setminus \{0\}$, chacune de ces classes possède $q-1$ éléments. On en déduit que $(q-1)|\mathbb{P}(E)| = |E \setminus \{0\}|$ et donc que $|\mathbb{P}(E)| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

   On aurait également pu utiliser le résultat qui, par des choix de cartes affines successives, décompose $\mathbb{P}(E)$ en réunion disjointe d'espace affines de dimensions décroissantes de n à 0. On obtient alors $|\mathbb{P}(E)| = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1 = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 2.



1. (a) Deux droites distinctes d'un plan projectif se coupent toujours en un point, la seule obstruction possible à la bonne définition de leur point d'intersection serait donc que les deux droites soient confondues. Or les points a, b, c, d forment une base projective, cela signifie qu'ils sont trois à trois non alignés. Les droites (ab), (ac), (ad), (bc), (bd) et (cd) sont donc toutes distinctes, ce qui justifie l'existence des points a', b' et c'.
   De plus $a' \neq a$ (resp. b ; d) car sinon on aurait $a \in (bc)$ (resp. $b \in (ad)$; $d \in (bc)$) et les points a, b, c (resp. a, b, d ; b, c, d) seraient alignés. On en déduit que $a' \neq b'$ car sinon on aurait $a' \in (bd)$, ce qui, avec $a' \in (ad)$, impliquerait que $(bd) = (a'd) = (ad)$ et donc que a, b, d sont alignés. La droite $(a'b')$ est donc bien définie et elle est distincte de (ab) car sinon on aurait $a' \in (ab)$, ce qui avec $a' \in (bc)$ impliquerait que $a' = (ab) \cap (bc) = b$. Le point c'' est donc bien défini, ainsi que *mutatis mutandis* les points b'' et a''.

   (b) On considère les triangles a, b, c et a', b', c'. On a vu, dans la question précédente, que $a' \neq a$, $b' \neq b$ et $c' \neq c$; les droites (aa'), (bb') et (cc') sont donc bien définies. Elles contiennent également toutes d car, par exemple, $a' \in (ad)$ avec $a' \neq d$ et donc $(aa') = (ad)$. On en déduit que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes. D'après le théorème de Désargues, les points a'', b'' et c'' sont donc alignés.

2. Comme dit précédemment, le fait que a, b, c, d forment une base projective se traduit par le fait qu'ils sont trois à trois non alignés. L'énoncé dual du résultat précédent s"énonce donc ainsi :
   Soit $\mathbb{D}_a, \mathbb{D}_b, \mathbb{D}_c, \mathbb{D}_d \subset \mathbb{P}$ quatre droites trois à trois non concourantes. On note $\mathbb{D}'_a$ la droite passant par $\mathbb{D}_b \cap \mathbb{D}_c$ et $\mathbb{D}_a \cap \mathbb{D}_d$, $\mathbb{D}'_b$ la droite passant par $\mathbb{D}_a \cap \mathbb{D}_c$ et $\mathbb{D}_b \cap \mathbb{D}_d$, et $\mathbb{D}'_c$ la droite passant par $\mathbb{D}_a \cap \mathbb{D}_b$ et $\mathbb{D}_c \cap \mathbb{D}_d$; puis $\mathbb{D}''_a$ la droite passant par $\mathbb{D}_b \cap \mathbb{D}_c$ et $\mathbb{D}'_b \cap \mathbb{D}'_c$, $\mathbb{D}''_b$ la droite passant par $\mathbb{D}_c \cap \mathbb{D}_a$ et $\mathbb{D}'_c \cap \mathbb{D}'_a$, et $\mathbb{D}''_c$ la droite passant par $\mathbb{D}_a \cap \mathbb{D}_b$ et $\mathbb{D}'_a \cap \mathbb{D}'_b$. Alors les droites $\mathbb{D}''_a$, $\mathbb{D}''_b$ et $\mathbb{D}''_c$ sont concourantes.

Exercice 3.

1. (a) Commençons par remarquer que, par hypothèse, les triplets a, b, c et a, b, d sont tous les deux constitués de points deux à deux distincts. Les birapports $[a, b, c, d]$ et $[b, a, d, c]$ sont donc tous les deux définis. Par ailleurs, en notant $z_a, z_b, z_c, z_d \in \mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ les coordonnées projectives de, respectivement, a, b, c et d dans une base projective donnée, on a

$$[b, a, d, c] = \frac{\frac{z_b - z_d}{z_b - z_c}}{\frac{z_a - z_d}{z_a - z_c}} = \frac{z_b - z_d}{z_b - z_c} \cdot \frac{z_a - z_c}{z_a - z_d} = \frac{\frac{z_a - z_c}{z_a - z_d}}{\frac{z_b - z_c}{z_b - z_d}} = [a, b, c, d].$$

   (b) On a $x_0 \notin \mathrm{Fix}(f)$, donc $f(x_0) \neq x_0$. Nous sommes donc bien sous les hypothèse de la question précédente et on a

$$\Big[x_0, f(x_0), f(x), x\Big] = \Big[f(x_0), x_0, x, f(x)\Big].$$

Mais le birapport étant invariant par homographie, on en déduit que

$$\Big[x_0, f(x_0), f(x), x\Big] = \Big[f^2(x_0), f(x_0), f(x), f^2(x)\Big] = \Big[x_0, f(x_0), f(x), f^2(x)\Big].$$

(c) Supoosons que f est une involution. Alors $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ et il existe donc $x_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ qui vérifie alors bien $f^2(x_0) = x_0$.
Réciproquement, si il existe $x_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ tel que $f^2(x_0) = x_0$, alors $\mathrm{Fix}(f) \neq \mathbb{D}$ et donc $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$. Montrons que $f^2(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{D}$. Si $x = x_0$ ou $f(x_0)$ alors le résultat est clair. Sinon, d'après la question (b), on a $\Big[x_0, f(x_0), f(x), x\Big] = \Big[x_0, f(x_0), f(x), f^2(x)\Big]$. Cela signifie que x_0 et $f^2(x_0)$ ont la même coordonnée projective dans la base $x_0, f(x_0), f(x)$; on a donc bien $f^2(x_0) = x_0$.

2. Si f fixe trois points distincts de $\mathbb{D}$, alors ces points forment une base projective de $\mathbb{D}$ et f coïncide sur cette base avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$. On a donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$.

3. (a) Les points $a, b, f(a)$ forment une base de $\mathbb{D}$ car ils sont deux à deux distincts : $a \neq b$ car a, b, c est une base projective, $a \neq f(a)$ car $a \notin \mathrm{Fix}(f)$, et $b \neq f(a)$ par hypothèse. Par ailleurs, $f(b)$, $f(a)$ et b forment également une base projective : $f(a) \neq f(b)$ car $a \neq b$ et que toute homographie est injective, $b \neq f(b)$ car $b \notin \mathrm{Fix}(f)$, et le dernier cas a déjà été argumenté. Il existe donc une unique homographie $i : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ qui envoie la base $a, b, f(a)$ sur la base $f(b), f(a), b$.

Les points $f(a), f(b), i(c)$ forment une base projective. On a en effet $i(c) \neq f(a)$ car sinon on aurait $i(c) = f(a) = i(b)$ et donc $b = c$ par injectivité de i ; cela contredirait le fait que a, b, c soit une base projective. De même $i(c) \neq f(b) = i(a)$. Le fait que $f(a) \neq f(b)$ a déjà été argumenté. Mais les points $f(b), f(a), f(c)$ forment eux aussi une base projective de $\mathbb{D}$ car ce sont les images d'une base projective par une homographie. Il existe donc bien unique homographie $j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ qui envoie la base $f(a), f(b), i(c)$ sur la base $f(b), f(a), f(c)$.

(b) On a par hypothèse $b \neq f(a)$ donc $b \notin \mathrm{Fix}(i)$ et pourtant $i^2(b) = i\Big(f(a)\Big) = b$. D'après la question 1.(c), i est une involution. De même, on a déjà argumenté que $f(a) \neq f(b)$, mais ceux-ci sont explicitement échangés par j. Toujours d'après la question 1.(c), j est donc une involution. Enfin, un calcul direct montre que f et $j \circ i$ coïncident sur la base a, b, c ; ces deux homographies sont donc égales.

4. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une homographie. Si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$, alors elle est la composé de n'importe quelle involution avec elle-même. Sinon, d'après la question 2, elle possède au plus deux points fixes. Si $\mathbb{K}$, le corps sur lequel on travaille, possède au moins trois éléments, alors $\mathbb{D}$ contient au moins quatre éléments et on peut donc choisir $a \neq b \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{Fix}(f)$. Si $b \neq f(a)$ ou, en échangeant les rôles de a et b, si $a \neq f(b)$, alors f peut être écrite comme composé de deux involutions d'après la question 3. Enfin, si $b = f(a)$ et $a = f(b)$, alors $f^2(a) = a$ avec $a \notin \mathrm{Fix}(f)$; f est alors une involution d'après la question 1.
Il reste néanmoins à traiter un dernier cas, celui où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. Alors $\mathbb{D}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^1$, constitué de trois points $0, 1, \infty$ qui forment une base projective. Les homographies correspondent donc aux 6 permutations possibles de ces éléments. On vérifie alors à la main que toutes ces permutations s'écrivent comme produit d'une ou deux transpositions.

Exercice 4.

1. On note φ la forme polaire de q. Si $x \in \mathrm{Cone}(q)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x) = 0$, et donc $\mathbb{K}.x \subset \mathrm{Cone}(q)$.

2. Si $q_1, q_2 \in \mathrm{Quad}(E) \setminus \{0\}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $q_2 = \lambda q_1$. On a alors, pour tout $x \in E$, $q_1(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda q_1(x) = 0 \Leftrightarrow q_2(x) = 0$, et donc $\mathrm{Cone}(q_1) = \mathrm{Cone}(q_2)$.

On note φ_1 et φ_2 les formes polaires de q_1 et q_2. Par unicité de la forme polaire, on a alors $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$. Or, pour $i = 1, 2$, le rang de q_i est définie comme la dimension de l'image de l'application

$$R(\varphi_i) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ y & \longmapsto & \Big(x \mapsto \varphi_i(x, y)\Big) \end{array}.$$

Mais par linéarité, on a clairement $R(\varphi_1)(\lambda y) = R(\varphi_2)(y)$ et $R(\varphi_2)(\lambda^{-1}y) = R(\varphi_1)(y)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_2)$ et donc que $\mathrm{rg}(q_1) = \mathrm{rg}(q_2)$.

3. Une forme quadratique q est de signature (σ_p, σ_n) si et seulement si il existe une base de E telle que $q(x_1, \dots, x_{\sigma_n}) = x_1^2 + \cdots + x_{\sigma_p}^2 - x_{\sigma_p+1}^2 - \cdots - x_{\sigma_p+\sigma_n}^2$. Or, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors

$$\lambda q(x_1, \dots, x_{\sigma_n}) = (\sqrt{\lambda}x_1)^2 + \cdots + (\sqrt{\lambda}x_{\sigma_p})^2 - (\sqrt{\lambda}x_{\sigma_p+1})^2 - \cdots - (\sqrt{\lambda}x_{\sigma_p+\sigma_n})^2.$$

Par un changement de base évident, on obtient alors également (σ_p, σ_n) comme signature pour λq. Par contre, si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, on a alors

$$\lambda q(x_1, \dots, x_{\sigma_n}) = -(\sqrt{-\lambda}x_1)^2 - \cdots - (\sqrt{-\lambda}x_{\sigma_p})^2 + (\sqrt{-\lambda}x_{\sigma_p+1})^2 + \cdots + (\sqrt{-\lambda}x_{\sigma_p+\sigma_n})^2,$$

et λq a alors (σ_n, σ_p) comme signature.

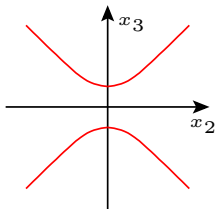
Au final, si $(\sigma_{p_1}, \sigma_{n_1})$ et $(\sigma_{p_2}, \sigma_{n_2})$ sont les signatures de deux formes quadratiques colinéaires, alors on a $(\sigma_{p_2}, \sigma_{n_2}) = (\sigma_{p_1}, \sigma_{n_1})$ ou $\tau(\sigma_{p_1}, \sigma_{n_1})$, où τ est l'application qui échange les coefficients d'un couple.

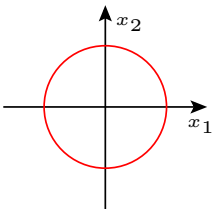
4.(a),(b) i. D'après la caractérisation de la signature évoquée à la question précédente, la signature de q_1 vaut $(2, 1)$ et son rang vaut $2 + 1 = 3$.

Pour q_2, on peut écrire $x_2x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2$. Sa signature vaut donc $(1, 1)$ et son rang $1 + 1 = 2$.

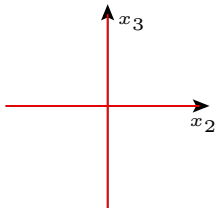
ii. Se restreindre à la carte affine $x_i = 1$, c'est identifier les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ avec leur unique point (s'il existe) dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. Pour tracer les images d'une quadrique q, il faut donc déterminer les éléments du cône d'une de ses équations dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. Donc par exemple, pour $i = 1$, il suffit de résoudre l'équation $q(1, x_2, x_3) = 0$ en les variables x_2 et x_3. Cela donne :

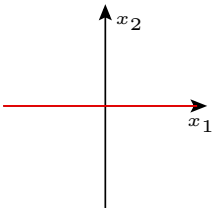
Q_1 en $x_1 = 1 : x_3^2 = 1 + x_2^2$ $\qquad$ Q_1 en $x_1 = 1 : x_1^2 + x_2^2 = 1$





Q_2 en $x_1 = 1 : x_2x_3 = 0$ $\qquad$ Q_2 en $x_1 = 1 : x_2 = 0$





5. Il suffit de montrer que l'image d'un produit par ψ est égal au produit des images. Or, pour tout $f_1, f_2 \in \mathrm{GL}(E)$, et tout $q \in \mathrm{Quad}(E)$, on a

$$\psi(f_1 \circ f_2)(q) = q \circ (f_1 \circ f_2)^{-1} = q \circ (f_2^{-1} \circ f_1^{-1}) = (q \circ f_2^{-1}) \circ f_1^{-1} = \psi(f_1)\left(q \circ f_2^{-1}\right) = \psi(f_1)\Big(\psi(f_2)(q)\Big) = \Big(\big(\psi(f_1)\big) \circ \big(\psi(f_2)\big)\Big)(q),$$

et donc $\psi(f_1 \circ f_2) = \big(\psi(f_1)\big) \circ \big(\psi(f_2)\big)$. Cela implique, en particulier que ψ envoie Id_E sur $\mathrm{Id}_{\mathrm{Quad}(E)}$.

6. On définit l'action d'une homographie $f \in \mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$ sur une quadrique $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ en considérant $\widetilde{f} \in \mathrm{GL}(E)$ dont f est le projectivisé et une équation q de Q. On pose alors $f.Q := \pi\Big(\psi(\widetilde{f})(q)\Big) = \pi(q \circ \widetilde{f}^{-1})$. Cela est bien définie car si $\widehat{f} \in \mathrm{GL}(E)$ a le même projectivisé que $\widetilde{f}$ et si q' est une autre équation de Q, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ tels que $\widehat{f} = \lambda\widetilde{f}$ et $q' = \mu q$. On a alors $\widehat{f}^{-1} = \lambda^{-1}\widetilde{f}^{-1}$ et donc

$$q' \circ \widehat{f}^{-1} = (\mu q) \circ (\lambda^{-1}\widetilde{f}^{-1}) = \mu\Big(q \circ (\lambda^{-1}\widetilde{f}^{-1})\Big) = \mu\lambda^{-2}(q \circ \widetilde{f}^{-1}),$$

et donc $\pi\Big(q' \circ \widehat{f}^{-1}\Big) = \pi\Big(q \circ \widetilde{f}^{-1}\Big)$. Cela définit bien une action de groupe car

- pour toute $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ d'équation $q \in \mathrm{Quad}(E)$, on a $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}.Q = \pi\Big(\psi(\mathrm{Id}_E)(q)\Big) = \pi(q) = Q$;
- pour tous $f_1, f_2 \in \mathrm{P}\mathcal{GL}(E)$, projectivisé de respectivement $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2} \in \mathrm{GL}(E)$ et toute $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{uad}(E)$ d'équation $q \in \mathrm{Quad}(E)$, la forme quadratique $\psi(\widetilde{f_2})(q)$ est, d'après ce qui précéde, une équation pour $f_2.Q$, et donc, d'après la question précédente

$$f_1.(f_2.Q) = \pi\Big(\psi(\widehat{f_1})\Big(\psi(\widetilde{f_2})(q)\Big)\Big) = \pi\Big(\Big(\psi(\widetilde{f_1}) \circ \psi(\widetilde{f_2})\Big)(q)\Big) = \pi\Big(\psi(\widetilde{f_1} \circ \widetilde{f_2})(q)\Big) = (f_1 \circ f_2).Q.$$

7. On note $\widetilde{f} \in \mathrm{GL}(E)$ de projectivisé f et $q \in \mathrm{Quad}(E)$ une équation pour Q. D'après ce qui précède, $q \circ \widetilde{f}^{-1}$ est une équation pour $f.Q$ et l'image de $f.Q$ est donc $\mathrm{Cone}(q \circ \widetilde{f}^{-1})$. Pour tout $x \in \mathbb{P}(E)$ tel que $x = \pi(u)$ avec $u \in E \setminus \{0\}$, on a donc

$$\begin{aligned} x \text{ est dans l'image de } f.Q &\iff u \in \mathrm{Cone}(q \circ \widetilde{f}^{-1}) \iff (q \circ \widetilde{f}^{-1})(u) = 0 \iff q\Big(\widetilde{f}^{-1}(u)\Big) = 0 \\ &\iff \widetilde{f}^{-1}(u) \in \mathrm{Cone}(q) \iff f^{-1}(x) \in C \iff x \in f(C). \end{aligned}$$

   On en déduit que l'image de $f.Q$ est $f(C)$.

8. Sur $\mathbb{C}$, les formes quadratiques sont classifiées par le rang, c'est-à-dire que pour deux formes quadratiques $q_1, q_2 \in \mathrm{Quad}(E)$, il existe $f \in \mathrm{GL}(E)$ telle que $q_2 = q_1 \circ f$ si et seulement si $\mathrm{rg}(q_1) = \mathrm{rg}(q_2)$.

   Sur $\mathbb{R}$, les formes quadratiques sont classifiées par la signature.

9. D'après la question 2. la notion de rang pour les quadriques est bien définie. Il en résulte que, sur $\mathbb{C}$, les quadriques sont également classifiées par le rang. En effet, si deux quadriques Q_1, Q_2 sont équivalentes, il existe $f \in \mathrm{GL}(E)$ telle que $Q_2 = f.Q_1$. Donc si $\widetilde{f} \in \mathrm{GL}(E)$ est de projectivisé f, et si $q_1 \in \mathrm{Quad}(E)$ est une équation pour Q_1, alors $q_1 \circ \widetilde{f}^{-1}$ est une équation de Q_2 ayant le même rang que q_1. Les quadriques Q_1 et Q_2 ont donc le même rang. Réciproquement, si elles ont le même rang, alors leurs équations q_1, q_2 ont le même rang et sont donc équivalentes en tant que formes quadratiques. Il existe donc $\widetilde{f} \in \mathrm{GL}(E)$ telle que $q_2 = q_1 \circ \widetilde{f}^{-1}$, ce qui, une fois projectivisé, implique que Q_1 et Q_2 sont équivalentes. Ainsi, sur $\mathbb{C}^n$, il existe n classes de quadriques, le rang pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Celles-ci ne sont non dégénérées que si le rang vaut n. Il n'existe donc, à équivalence près, qu'une seule quadrique non dégénérée.

   Par contre, la question 3. montre que, sur $\mathbb{R}$, l'invariant classifiant des formes quadratiques, à savoir la signature, n'induit pas exactement un invariant pour les quadriques. Il faut pour cela oublier l'ordre du couple (σ_p, σ_n) et ne considérer que l'ensemble $\{\sigma_p, \sigma_n\}$. Mais en raisonnant de même, on montre alors que les quadriques sont classifiées par l'ensemble (non ordonné) $\{\sigma_p, \sigma_n\}$ où (σ_p, σ_n) est la signature d'une équation de la quadrique. De manière équivalente, on peut ne considérer que les couples (σ_p, σ_n) avec $\sigma_p \geq \sigma_n$. Ainsi, sur $\mathbb{R}^2$, il existe trois classes de quadriques correspondant aux signatures $(2, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Sur $\mathbb{R}^3$, il y en a 5, correspondant aux signatures $(3, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Sur $\mathbb{R}^n$, pour qu'une quadrique soit non dégénérée, il faut que ses équations le soient et donc qu'elles aient une signature (σ_p, σ_n) avec $\sigma_p + \sigma_n = n$. On en déduit que si $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$, selon la parité de n, alors il existe, à équivalence près $k + 1$ quadriques non dégénérées, correspondant aux signatures $(n, 0), (n - 1, 1), \ldots, (n - k, k)$.