Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Notes de cours

Introduction

Géométrie au collège : raisonnez de tête ne suffit pas, il faut faire des dessins. Mais raisonner sur des figures peut être trompeur, il faut formaliser les choses.

Démarche inverse : sur les dessins, les points sont faciles et les vecteurs plus abstraits ; dans le formalisme, on prendra le contre-pied car les vecteurs sont linéaires donc plus facile (existence d'un zéro absolu) et les points seront plus abstraits.

Linéaire *vs* affine : dans l'espace, on rend égalitaire tous les points, on oublie la spécificité de zéro (ou inversement, tout le monde peut être zéro) ; dans les formules, on rajoute des termes constants aux combinaisons linéraires.

1 Géométrie affine

On travaille *a priori* sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, mais on pensera surtout au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Espaces et sous-espaces affines

1.1.1 Espaces affines

L'essence du caractère "affine" réside dans le fait qu'à deux points, on peut associer un vecteur, et que les vecteurs sont linéaires. La définition va donc se baser là-dessus.

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel, on appelle *espace affine* d'*espace directeur* (ou de *linéarisé*) E tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une application

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u} \in E, \exists! y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u}$;
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles).

Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, on dit que $\mathcal{E}$ est également de dimension n. On appelle droite tout espace affine de dimension 1 et plan tout espace affine de dimension 2.

Nomenclature. Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire explicite, les majuscules cursives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc seront des espaces affines dont les espaces directeurs associés respectifs seront notés par la même lettre en majuscule romane E, F, G, etc. Les points d'espaces affines seront notés par minuscules a, b, c, etc et les vecteurs par des minuscules surmontées d'une flèche $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, etc. Le vecteur entre deux points a et b sera noté $\overrightarrow{ab}$.

La condition 1. de la Définition 1.1.1 indique que, une fois un point base donné, l'ensemble des points est en bijection avec l'ensemble des vecteurs. Cela permet de définir la notation suivante.

Notation. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de linéarisé E. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on note $\xi_{x_0} : \mathcal{E} \to E$ la bijection définie par $\xi_{x_0}(x) = \overrightarrow{x_0 x}$ pour tout $x \in \mathcal{E}$.

La condition 2. de la Définition 1.1.1 indique que le choix d'un point base n'a que peu de conséquences car changer ce point correspond à tout "translater" par un même vecteur. Cela peut pousser à donner une définition alternative, mais équivalente, d'un espace affine (voir TD1).

Définition 1.1.2. Soit E un espace vectoriel, on appelle *espace affine* d'espace directeur E tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une action fidèle et transitive de E sur $\mathcal{E}$.

De cette approche, on retiendra la notation suivante.

Notation. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on note $x + \overrightarrow{u}$ l'image de x par l'action de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire l'unique point $y \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u}$. Notamment, par définition et pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on a $x + \overrightarrow{xy} = y$ et même, plus précisément, $x + \overrightarrow{u} = y$ ssi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$.

Remarque 1.1.3. D'après la condition 2. de la Définition 1.1.1, un point $x_0 \in \mathcal{E}$ étant fixé, tout élément de $\mathcal{E}$ est décrit de manière unique comme $x_0 + \overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$.

Remarque. Dans la littérature, on trouve la notation $y - x$ pour $\overrightarrow{xy}$. Afin d'éviter toute confusion avec une notation ultérieure (voir notation 1.3.11), nous tâcherons de l'éviter.

Exemples.

1. Tout espace vectoriel E est naturellement muni d'une structure affine par
$$\mathcal{V}_E : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \end{array}.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$) est un espace affine de dimension n. On peut ainsi parler de la droite et du plan réels.
A l'inverse, tout espace affine n'est pas <u>naturellement</u> muni d'une structure vectorielle car cela nécessite de choisir <u>arbitrairement</u> un point base.

2. L'espace $\mathcal{E} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable} \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \cos(x).f(x) = 1 + \sin(x) \right\}$ est un espace affine d'espace directeur $E := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable} \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \cos(x).f(x) = 0 \right\}$.

3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $x \in \mathcal{E}$. Alors $x + F := \{x + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}$ est un espace affine d'espace directeur F.

Ce dernier exemple justifie la définition à venir de sous-espace affine.

1.1.2 Sous-espaces affines

Définition 1.1.4. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si il existe $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $x \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F} = x + F$.
Si F est de dimension finie $k \in \mathbb{N}$, on dit que $\mathcal{F}$ est également de dimension k. On appelle droite tout sous-espace affine de dimension 1, plan tout sous-espace affine de dimension 2 et, si $\mathcal{E}$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, hyperplan tout sous-espace affine de dimension $n - 1$.

Exemples.

- Les droites sont les hyperplans dans $\mathbb{R}^2$ mais pas dans $\mathbb{R}^3$.
- Les plans sont les hyperplans dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.1.5. Tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur $F = \{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\} \subset E$.

Démonstration. Par définition des sous-espaces affines, il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ tels que $\mathcal{F} = x_0 + F$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est un espace affine, on considère l'application $\mathcal{V}_{\mathcal{E}|\,\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$. Son image est bien inclue dans F car pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ tels que $x = x_0 + \overrightarrow{u}$ et $y = x_0 + \overrightarrow{v}$ et donc $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in F$. On montre le coté existence de la condition 1 de la Définition 1.1.1 en considérant, pour tout $x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$ et tout $\overrightarrow{v} \in F$, $y := x_0 + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ qui est bien dans $\mathcal{F}$ car $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$. Le coté unicité et la condition 2 sont satisfaits pour $\mathcal{F}$ car ils le sont déjà pour $\mathcal{E}$.

Il reste à montrer que $F = \{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\}$. Pour cela, on procède par double inclusion. On a déjà montré un sens en montrant que l'image de $\mathcal{V}_{\mathcal{E}|\,\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$ est inclue dans F. Réciproquement, soit $\overrightarrow{u} \in F$, alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$ avec $y := x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$ et $x := x_0 = x_0 + \overrightarrow{0} \in \mathcal{F}$. □

Corollaire 1.1.6. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine, alors pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$, on a $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\} = F = \{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\}$.

Corollaire 1.1.7. Pour tous $x, y \in \mathcal{E}$ et tous $F, G \subset E$, on a

$$x + F = y + G \iff (F = G \text{ et } \overrightarrow{xy} \in F).$$

Démonstration. Supposons que $x + F = y + G$. La description intrinsèque de l'espace directeur montre que $F = G$. De plus, $y = y + \overrightarrow{0} \in y + G = x + F$, donc il existe $\overrightarrow{u} \in F$ tel que $y = x + \overrightarrow{u}$ et on a alors $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} \in F$.

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{xy} \in F$. Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in F$, on a $y + \overrightarrow{u} = x + \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{u} \in x + F$ car $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{u} \in F$. On en déduit que $y + F \subset x + F$. Mais $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy} \in F$, donc de la même manière, $x + F \subset y + F$. Au final, on a bien $x + F = y + F$. □

Un sous-espace affine est donc décrit par n'importe lequel de ses points et son (unique) espace directeur.

Proposition 1.1.8. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace non vide de $\mathcal{E}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine ;
ii. pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$, $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
iii. il existe $x_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. **i. ⇒ ii. :** c'est une conséquence du corollaire 1.1.6.

ii. ⇒ iii. : c'est évident dès lors que $\mathcal{F}$ est non vide.

iii. ⇒ i. : si $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathcal{F} = x_0 + \{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

□

Remarque 1.1.9. Bien entendu, le point iii. sera plutôt utile à montrer qu'un sous-espace donné est affine, tandis que le point ii. servira à montrer qu'il ne l'est pas.
Notons qu'il est important de considérer $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ avec x_0 fixé et non $\{\overrightarrow{xy} | x, y \in \mathcal{F}\}$ car $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace affine, et pourtant $\{x - y | x, y \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Le principe qui suit se révélera très utile pour montrer que deux sous-espaces affines s'intersectent.

Proposition 1.1.10. Si $F + G = E$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$

Démonstration. Fixons $x \in \mathcal{F}$ et $y \in \mathcal{G}$. On a alors $\overrightarrow{xy} \in E = F + G$, il existe donc $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On pose alors $z = y - \overrightarrow{v}$ qui est dans $\mathcal{G}$ car $y \in \mathcal{G}$ et $-\overrightarrow{v} \in G$. Mais on a aussi $z = x + \overrightarrow{xy} - \overrightarrow{v} = x + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$. on en déduit que $z \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ qui est donc non vide. □

Introduisons maintenant les notions d'alignement et de parallélisme.

Définition 1.1.11. On dit que trois points $x, y, z \in \mathcal{E}$ sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xz}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz}, \overrightarrow{zx})$ est de dimension 1.

Définition 1.1.12. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ est *faiblement parallèle* à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si chacun est faiblement parallèle à l'autre, c'est-à-dire si $F = G$.

Exemples.

- Deux droites parallèles dans le plan.
- Une droite faiblement parallèles à un plan dans l'espace.

1.1.3 Quelques applications directes

Proposition 1.1.13. Par deux points distincts passent une unique droite

Démonstration. Soit x et y deux points distincts. D'après la proposition 1.1.5, toute droite contenant x et y est nécessairement dirigée par $\mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$. Le seul candidat est donc $a + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$ qui est bien une droite contenant $x = x + \overrightarrow{0}$ et $y = x + \overrightarrow{xy}$. □

Notation 1.1.14. Si x et y sont deux points distincts, on note (xy) l'unique droite passant par x et y.

Proposition 1.1.15. Soit x et $\mathcal{D}$ un point et une droite d'un plan, il existe une unique droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par x.

Démonstration. Il s'agit de la droite $x + D$. □

Proposition 1.1.16. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles.

Proposition 1.1.17. Tout sous-espace affine faiblement parallèle à un autre est soit disjoint de soit contenu dans l'autre.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathbb{E}$ deux sous-espaces affines tels que $F \subset G$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors il existe $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et on a $\mathcal{F} = x + F \subset x + G = \mathcal{G}$. □

Proposition 1.1.18. Deux droites distinctes dans un plan sont ou parallèles ou sécantes.

Démonstration. Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites non parallèles, alors $D_1 + D_2$ est de dimension 2, et donc $D_1 + D_2 = E$. D'après la proposition 1.1.10, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent. □

Corollaire 1.1.19. En caractéristique différente de 2, un sous-ensemble non vide est un sous-espace affine ssi il contient toutes les droites passant par deux de ses points.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine et soit $x \neq y \in \mathcal{F}$ deux de ses points. On note $\mathcal{D} := (xy)$. On a alors $D = \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xy} \in F$, donc $D \subset F$. Or $a \in \mathbb{D} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$, donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ d'après la proposition 1.1.17.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ contient toutes les droites passant par deux de ses points. On fixe $x_0 \in \mathcal{F}$ et, afin d'appliquer la proposition 1.1.8, on cherche à montrer que $F := \{\overrightarrow{x_0y} \big| y \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On a déjà $\overrightarrow{0} \in F$ car $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{x_0x_0}$.
Pour tout $\overrightarrow{u} \in F \setminus \{0\}$, on a $y = x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$, et donc toute la droite $(x_0y) = x_0 + \mathbb{K}.\overrightarrow{u}$ est contenue dans $\mathcal{F}$. On en déduit que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\overrightarrow{u} \in F$.
Enfin, on fixe $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$. S'ils sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$ d'après le cas précédent. Sinon, on considère le plan $\mathcal{P}$ passant par x_0 et engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a alors $x := x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$ et $y := x_0 + \overrightarrow{y} \in \mathcal{P}$. Puisque la caractéristique est différente de 2, les vecteurs $\overrightarrow{w}_1 := \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}_2 := \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont non colinéaires et d'après la proposition 1.1.18, les droites $\mathcal{D} := x_0 + \mathbb{K}.\overrightarrow{w}_1$ et $(xy) = y + \mathbb{K}.\overrightarrow{w}_2$ se coupent donc en un point z_0. Par hypothèse, $(xy) \subset \mathcal{F}$ car $x, y \in \mathcal{F}$ et donc $z_0 \in \mathcal{F}$. De plus, $z_0 \neq x_0$ car sinon, on aurait x_0, x et y seraient alignés et on aurait $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires. Toujours par hypothèse, on a donc $\mathcal{D} = (x_0z_0) \subset F$ et notamment $x_0 + \overrightarrow{w}_1 \in \mathcal{F}$. On en déduit que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$. □

Remarque 1.1.20. La première implication est toujours valable, même en caractéristique 2, mais la seconde devient fausse. En effet, sur $\mathbb{F}_2$, les droites sont réduites à deux éléments, donc tout sous-ensemble de $\mathbb{F}_2^n$ contient toute les droites passant par deux de ses points. Mais, si $n \geq 2$, tout-ensemble de $\mathbb{F}_2^n$ n'est pas pour autant affine.

1.1.4 Opérations sur les sous-espaces affines

Dans cette partie, on introduit un certain nombre d'opérations sur ou produisant des sous-espaces affines.

Proposition 1.1.21. Une intersection (quelconque) de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et soit vide soit un sous-espace affine d'espace directeur l'intersection des espaces directeurs.

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{G} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ et $G := \bigcap\limits_{i\in I} F_i$. Supposons que l'intersection est non vide et fixons $x_0 \in \mathcal{G}$. D'après la proposition 1.1.8, il suffit de montrer que $\{\overrightarrow{x_0y} \big| y \in \mathcal{G}\} = G$, lequel est bien un sous-espace vectoriel de E. Alors on a

$$\overrightarrow{u} \in G \Leftrightarrow \forall i \in I, \overrightarrow{u} \in F_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_i \Leftrightarrow x_0 + \overrightarrow{u} \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \{\overrightarrow{x_0y} \big| y \in \mathcal{G}\}.$$

□

Remarque 1.1.22. Les sous-espaces affines sont donc stables par intersection, mais pas par réunion. On pourra penser à la réunion de deux droites dans un plan. Pour pallier ce défaut, on pourra toutefois vouloir considérer le plus sous-espace affine contenant cette réunion, mais il faut avant cela justifier l'existence d'un tel "plus petit" espace.

Définition 1.1.23. Soit $X \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble (non nécessairement affine) de $\mathcal{E}$. On appelle, sous-espace affine engendré par X, noté $\mathrm{Aff}(X)$ l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant X. Cela correspond au plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X.

Exemples 1.1.24.

- Les sous-espaces affines engendrés par un, deux, trois points.
- Les sous-espaces affines engendrés par les réunions de sous-espaces affines :
  - deux droites dans le plan ;
  - deux droites dans l'espace ;

- une droite et un plan dans l'espace.

Proposition 1.1.25. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Alors

1. $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, H = F + G + k.\overrightarrow{xy}$;
2. $(H = F + G) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{G}, \overrightarrow{xy} \in F + G) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset)$.

Démonstration. Pour montrer le premier point, on fixe $x \in \mathcal{F}$ et $y \in \mathcal{G}$. On a $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, donc $F, G \subset H$. De plus, $x, y \in \mathcal{H}$, donc $\overrightarrow{xy} \in H$ et de fait $F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy} \subset H$. Montrons l'inclusion inverse. Pour cela, on pose $\mathcal{H}' := x + F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$. On a alors $\mathcal{F} = x + F \subset \mathcal{H}'$, $y = x + \overrightarrow{xy} \in \mathcal{H}'$ et donc $\mathcal{G} = y + G \subset \mathcal{H}'$. Le sous-espace affine $\mathcal{H}'$ contient donc $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, par minimalité de $\mathcal{H}$, on a donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ et donc $H \subset F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$.

Pour le second point, on sait déjà que $H = F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$, donc que $H = F + G$ ssi $\overrightarrow{xy} \in F + G$. En appliquant la proposition 1.1.10 avec $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, on sait que si $F + G = H$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Réciproquement, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, on peut appliquer le premier point avec $x = y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, ce qui donne $H = F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{0} = F + G$. □

Corollaire 1.1.26. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H} := \mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont de dimensions finies, alors

1. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$;
2. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\dim(\mathcal{H}) = 1 + \dim(F + G)$.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $H = F + G$ et donc $\dim(\mathcal{H}) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Mais par ailleurs, toujours car $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, on a également $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \dim(F \cap G)$.

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\overrightarrow{xy} \notin F + G$, et donc $F + G + \mathbb{K}.\overrightarrow{xy} = (F + G) \oplus \mathbb{K}.\overrightarrow{xy}$. □

Exemples 1.1.27.

- Deux droites, sécantes ou parallèles, dans le plan.
- Deux droites, sécantes ou disjointes (parallèles ou non) dans l'espace. Notamment, on voit que, dans le cas où $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, la dimension de $\mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ ne dépend pas que de dimensions affines.
- Une droite et un plan, sécants ou parallèles, dans l'espace.

1.2 Applications affines

1.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.2.1. On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine si elle respecte les structures affines, c'est-à-dire s'il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "f \times f"'] & E \arrow[d, "\overrightarrow{f}"] \\ \mathcal{F} \times \mathcal{F} \arrow[r] & F \end{tikzcd} .$$

Cela signifie que, pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})$.

Proposition 1.2.2. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine ssi il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times E \arrow[r] \arrow[d, "f \times \overrightarrow{f}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{F} \times F \arrow[r] & \mathcal{F} \end{tikzcd}.$$

Cela signifie que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a $f(x + \overrightarrow{u}) = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

Démonstration. Voir TD1. □

Proposition–Définition 1.2.3. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine, alors il existe une unique application linéaire $\overrightarrow{f} : E \to F$ faisant commuter les deux diagrammes ci-dessus. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, elle est décrite par $\xi_{f(x_0)} \circ f \circ \xi_{x_0}^{-1}$. On l'appelle linéarisée de f.

Démonstration. La condition $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}$ impose la valeur de $\overrightarrow{f}$ en tout $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$ et on a alors $f(x + \overrightarrow{u}) = f(x) + \overrightarrow{f(x)f(x + \overrightarrow{u})} = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

De plus, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a $(\xi_{f(x_0)} \circ f \circ \xi_{x_0}^{-1})(\overrightarrow{u}) = (\xi_{f(x_0)} \circ f)(x_0 + \overrightarrow{u}) = \xi_{f(x_0)}(f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. □

Corollaire 1.2.4. Pour tout $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine, on a $f = \xi_{f(x_0)}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \xi_{x_0}$.

Proposition 1.2.5. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est affine ;

ii. pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'application $\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{u})} \end{array}$ est linéaire ;

iii. il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que l'application $\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{u})} \end{array}$ soit linéaire.

L'application $\overrightarrow{f}$ ne dépend alors pas de x_0 et il s'agit de la linéarisée de f.

Démonstration. **i. ⇒ ii. :** si f est affine, alors $\overrightarrow{f}$ est sa linéarisé. Elle est donc linéaire et ne dépend pas de x_0.

ii. ⇒ iii. : c'est évident.

iii. ⇒ i. : Il faut vérifier que $f(x + \overrightarrow{u}) = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$. Or, par hypothèse,

$$\begin{aligned} f(x + \overrightarrow{u}) &= f(x_0 + \overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u}) = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u})} \\ &= f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{u}) = f(x_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \\ &= f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{x_0x})} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(x_0 + \overrightarrow{x_0x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \\ &= f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

□

Exemples 1.2.6.

- L'identité est affine.
- Toute application constante est affine.
- Les translation $t_{\overrightarrow{u}}$ par un élément $\overrightarrow{u} \in E$ sont affines.
- La projection de $E \oplus F$ sur E selon F est affine.
- Pour tout $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(E)$ et tout $x \in \mathcal{E}$, $f : \{x + \overrightarrow{u} \mapsto x + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\}$.
  Plus généralement, pour tout $\overrightarrow{f} : E \to F$ linéaire et tout couple $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, $f : \{x + u \mapsto y + \overrightarrow{f}(u)\}$ est affine. Toute application affine peut en fait s'écrire sous cette forme.
- En caractéristique différente de 2, l'application carré sur $\mathbb{K}$ n'est pas affine.

Proposition 1.2.7. La composé de deux applications affines est affine, et sa linéarisé est la composé des linéarisé.

Démonstration. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ deux applications affines. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a $(g \circ f)(x + \overrightarrow{u}) = g(f(x + \overrightarrow{u}) = g(f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})) = g(f(x)) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})) = (g \circ f)(x) + (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{u})$. □

Proposition 1.2.8. Une application affine est injective (resp. surjective) ssi sa linéarisée est injective (resp. surjective).
De plus, si elle est bijective, alors son application réciproque est affine, de linéarisé l'inverse du linéarisé.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 1.2.4. □

Notation 1.2.9. On note $\mathrm{MA}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$) l'ensemble des applications (resp. bijections) affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Proposition 1.2.10. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Alors

1. l'image par f d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{f}(F)$;
2. l'image réciproque par f d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{f}^{-1}(F)$.

Démonstration. Pour le premier point, on fixe $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. En fixant un point $x_0 \in \mathcal{E}'$ quelconque, on a $f(\mathcal{E}') = f(x_0) + \overrightarrow{f}(E')$ qui est clairement affine.

Pour le second point, on fixe plutôt $\mathcal{F}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ et on suppose que $f^{-1}(\mathcal{F}')$ est non vide. On peut donc fixer $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{F})$ et on a alors $f^{-1}(\mathcal{F}') = x_0 + \overrightarrow{f}^{-1}(F')$. En effet,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathcal{F}') \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x)} \in \mathcal{F}' \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{f(x_0)f(x)} \in F' \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0x}) \in F' \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{x_0x} \in \overrightarrow{f}^{-1}(F') \;\Leftrightarrow\; x = x_0 + \overrightarrow{x_0x} \in x_0 + \overrightarrow{f}^{-1}(F'). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.11. Toute application affine préserve l'alignement des points.

Remarque 1.2.12. La réciproque de cette proposition est fausse en toute généralité car si $\mathcal{F}$ est une droite, alors toute application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ envoie tous points sur des points alignés. Néanmoins, nous verrons plus tard que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ ont même dimension $n \geq 2$, et si f est bijective, alors la propriété de préserver l'alignement implique le caractère affine.

Théorème 1.2.13. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux espaces affines réelles de même dimension au moins 2, alors toute bijection $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ préservant l'alignement des points est affine.

Démonstration. Voir TD4. □

1.2.2 Mini-bestiaire

On introduit ici un peu de vocabulaire sur les applications affines.

Définition 1.2.14. On appelle translation toute application de la forme

$$t_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & x + \overrightarrow{u} \end{array},$$

avec $\overrightarrow{u} \in E$.

Définition 1.2.15. On appelle homothétie toute application de la forme

$$h_{x_0,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x_0 + \overrightarrow{u} & \longmapsto & x_0 + \lambda\overrightarrow{u} \end{array},$$

avec $x_0 \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Définition 1.2.16. On dit que $f \in \mathrm{GA}(E)$ est une dilatation de coefficient $\lambda \in \mathbb{K}^*$ si $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Proposition 1.2.17. Toute dilatation est une translation ou une homothétie.

Démonstration. Voir TD1. □

Définition 1.2.18. On dit que $f \in \mathrm{MA}(E)$ est une projection si $f \circ f = f$. On parlera alors de projection sur $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathcal{E}$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E) \subset E$.

Proposition 1.2.19. Pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et tout $G \subset E$ tels que $F \oplus G = E$, il existe une unique projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Démonstration. Voir TD1. □

Définition 1.2.20. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, $G \subset E$ tel que $F \oplus G = E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle affinité de base $\mathcal{F}$, parallélement à G et de rapport λ l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie, pour tout $x \in \mathcal{E}$, par $f(x) = p(x) + \lambda\overrightarrow{P(x)x}$, où $p \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G. Si $\lambda = -1$, on parle aussi de symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ le long de G.

Définition 1.2.21. On dit que $f \in \mathrm{GA}(E)$ est une involution si $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.2.22. Une involution affine est soit l'identité, soit une symétrie.

Démonstration. Voir TD1. □

Définition 1.2.23. On appelle forme affine toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$.

1.2.3 Points fixes

On s'intéresse maintenant aux points fixes des applications affines, car ceux-ci vont jouer un rôle crucial dans leur étude.

Proposition 1.2.24. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. L'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f est soit vide soit un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{E} \to E$ définie, pour tout $x \in \mathcal{E}$, par $\varphi(x) = \overrightarrow{xf(x)}$. C'est une application affine avec $\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E$ car, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$\varphi(x + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{(x + \overrightarrow{u})\big(f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\big)} = \overrightarrow{(x + \overrightarrow{u})x} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f(x)\big(f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\big)} = \varphi(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}.$$

On conclut, grace à la proposition 1.2.10, en remarquant que $\mathrm{Fix}(f) = \varphi^{-1}\big(\{0\}\big)$. □

Proposition 1.2.25. Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'application qui envoie une application affine sur son linéarisé induit un isomorphisme entre $\mathrm{MA}_{x_0}(\mathcal{E}) := \{f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E}) \mid f(x_0) = x_0\}$ et $\mathrm{End}(E)$.

Démonstration. L'application respecte bien la composition en vertu de la proposition 1.2.7, et sa réciproque est obtenue en conjuguant par ξ_{x_0}. □

Proposition 1.2.26. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$. Pour chaque $x_0 \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\overrightarrow{u} \in E$ et $\widetilde{f} \in \mathrm{MA}_{x_0}(\mathcal{E})$ tels que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \widetilde{f}$. On a alors $\overrightarrow{\widetilde{f}} = \overrightarrow{f}$.

Démonstration. Supposons qu'une telle décomposition existe, on a alors $x_0 + \overrightarrow{x_0 f(x_0)} = f(x_0) = (t_{\overrightarrow{u}} \circ \widetilde{f})(x_0) = t_{\overrightarrow{u}}(x_0) = x_0 + \overrightarrow{u}$, ce qui implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$ et $\widetilde{f} = t_{\overrightarrow{f(x_0)x_0}} \circ f$. Rétrospectivement, on vérifie que ces éléments satisfont les conditions voulues. □

Remarque 1.2.27. Pour tout $f, g \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ et tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on a $g \circ f = (t_{u_g + \overrightarrow{g}(u_f)}) \circ (\widetilde{g} \circ \widetilde{f})$. On reconnait là une structure de produit semi-direct.

1.3 Barycentres & Convexité

1.3.1 Barycentres

Proposition 1.3.1. Pour tout $\mathcal{S} = ((x_1, \lambda_1), \ldots, (x_k, \lambda_k)) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{K})^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ l'application $\psi_{\mathcal{S}} : \mathcal{E} \to E$ définie par $\psi_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{xx_i}$ est constante si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ et possède un unique antécédent à $\overrightarrow{0}$ sinon.

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$. Il suffit alors d'écrire que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\psi_{\mathcal{S}}(x) = \psi_{\mathcal{S}}(x_0) + \Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i\Big)\overrightarrow{xx_0}$. □

Remarque 1.3.2. L'ordre des couples (x_i, λ_i) ne joue aucun rôle.

Définition 1.3.3. On appelle *système de points pondérés de* $\mathcal{E}$ toute famille finie $\mathcal{S}$ de couples non ordonnée $(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_k, \lambda_k) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$ telle que $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$. Lorsqu'elle celle-ci est bien défini, c'est-à-dire lorsque la somme globale des coefficients est non nulle, on notera par $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ la concaténation de deux systèmes de points pondérés.

Remarque 1.3.4. Un même point x, voire un même couple (x, λ) peut apparaitre plusieurs fois dans un système de points pondérés.

Définition 1.3.5. Pour tout système de point pondérés $\mathcal{S}$, on appelle *barycentre de* $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{Bar}(\mathcal{S})$, l'unique antécédent de $\overrightarrow{0}$ par $\psi_{\mathcal{S}}$.
Si tous les points sont distincts et que tous les coefficients sont égaux à 1, on parle d'*isobarycentre*. Pour l'isobarycentre de deux points, on parle aussi de *milieu*.

Exemples 1.3.6.

1. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ on a $\mathrm{Bar}((x, \lambda)) = x$.

2. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, le *milieu* de deux points $a, b \in \mathcal{E}$ est défini comme leur isobarycentre. En le notant m, on a alors $\overrightarrow{ma} = -\overrightarrow{mb}$.

3. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 3, le *centre de gravité* de trois points de $\mathcal{E}$ est défini comme leur isobarycentre.

Proposition 1.3.7. Soit $\mathcal{S} = (x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$ un système de points pondérés. Alors pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{S}) = x_0 + \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}.$$

Démonstration. En notant $\mathcal{S}$ le système de points pondérés, on a vu que $\psi_{\mathcal{S}}(x) = \psi_{\mathcal{S}}(x_0) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)\overrightarrow{xx_0}$. En appliquant cela à $x = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}$, on obtient $\psi_{\mathcal{S}}(x) = \psi_{\mathcal{S}}(x_0) - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \overrightarrow{0}$. □

Corollaire 1.3.8. Si un point apparait dans un système de points pondérés avec un coefficient nul, alors on peut l'enlever du système sans modifier le barycentre.
Si plusieurs couples d'un système de points pondérés font intervenir le même point, alors on peut les remplacer au sein du système, sans modifier le barycentre, par un seul couple dont le coefficient est la somme des coefficients.

Remarque 1.3.9. Le barycentre d'un système de points pondérés est clairement laissé invariant par multiplications de tous les coefficients par un même scalaire non nul. Ainsi, sans modifier le barycentre associé, on pourra toujours se ramener au cas d'un système dont chaque coefficient est non nul, où la somme des coefficients vaut 1 et où chaque point n'intervient qu'au plus une fois.

Définition 1.3.10. On dit qu'un système de points pondérés est *normalisé* si la somme de ses coefficients vaut 1.

Notation 1.3.11. Soit $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_k, \lambda_k) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$ un système normalisé de points pondérés, on notera son barycentre par $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Proposition 1.3.12 (associativité des barycentres)**.** Soit $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r$ des systèmes normalisés de points pondérés. Alors pour tous $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$, on a

$$\mathrm{Bar}\Big(\big((\mathrm{Bar}(\mathcal{S}_1), \mu_1), \dots, (\mathrm{Bar}(\mathcal{S}_r), \mu_r)\big)\Big) = \mathrm{Bar}\left(\mu_1 \mathcal{S}_1 * \dots * \mu_r \mathcal{S}_r\right),$$

où $\alpha\mathcal{S}_i$ est le système obtenu en multipliant tous les coefficients de $\mathcal{S}_i$ par α.
En notant $(x_1^i, \lambda_1^i), \dots, (x_{k_i}^i, \lambda_{k_i}^i) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$, les éléments de $\mathcal{S}_i$, cela donne

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i x_j^i\Big) = \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r\} \\ j \in \{1,\dots,k_i\}}} \mu_i \lambda_i^j x_i^j.$$

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$. D'après la proposition 1.3.7, on a

$$x_0 + \frac{1}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \sum_{i=1}^r \mu_i \overrightarrow{x_0 \mathrm{Bar}(\mathcal{S}_i)} = x_0 + \frac{1}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i \overrightarrow{x_0 x_j^i} = x_0 + \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r\} \\ j \in \{1,\dots,k_i\}}} \mu_i \lambda_j^i \overrightarrow{x_0 x_j^i}.$$

Il ne reste plus qu'à conclure, encore d'après la proposition 1.3.7, en remarquant que $\sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r\} \\ j \in \{1,\dots,k_i\}}} \mu_i \lambda_j^i = \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i = \sum_{i=1}^r \mu_i = 1$. □

Remarque 1.3.13. Ce résultat montre qu'un barycentre de barycentre est encore un barycentre. Par ailleurs, le résultat peut se réécrire, même pour des sytèmes non normalisés, comme

$$\mathrm{Bar}\,(\mathcal{S}_1 * \cdots * \mathcal{S}_r) = \mathrm{Bar}\Big(\big((\mathrm{Bar}(\mathfrak{S}_1), \Lambda_1), \ldots, (\mathrm{Bar}(\mathfrak{S}_r), \Lambda_r)\big)\Big)$$

où Λ_i est la somme des coefficients de $\mathcal{S}_i$.

La notion de barycentre est intimement liée au caractère affine. Cela se reflète sur les propositions suivantes, caractérisant respectivement les sous-espaces affines et les applications affines.

Lemme 1.3.14. Pour tous $x_0, x, y \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0x} + \mu\overrightarrow{x_0y} = \mathrm{Bar}((x, \lambda), (y, \mu), (x_0, 1 - \lambda - \mu))$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 1.3.7. □

Proposition 1.3.15. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide est un sous-espace affine ssi, pour tout système $\mathcal{S}$ de points pondérés de $\mathcal{F}$, $\mathrm{Bar}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}$.

Démonstration. D'après la proposition 1.3.7, il est clair que tout sous-espace affine est stable par barycentre. Réciproquement, si un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide est stable par barycentre, alors pour tout $x_0 \in \mathcal{F}$, le lemme 1.3.14 montre que $\{\overrightarrow{x_0y} | y \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. D'après la proposition 1.1.8, $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. □

Corollaire 1.3.16. Le sous-espace affine engendré par un ensemble $X \subset \mathcal{E}$ est égal à l'ensemble des barycentres de systèmes de points de X pondérés.

Démonstration. D'après la proposition 1.3.15, $\mathrm{Aff}(X)$ contiendra tous les barycentres de points de X. Mais d'après la proposition 1.3.12, l'ensemble des barycentres sur X est stable par barycentre, c'est donc lui-même un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'après la proposition 1.3.15. □

Proposition 1.3.17. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine ssi elle envoie tout barycentre de système de points pondérés sur le barycentre de l'image du système de points pondérés, autrement dit si, pour tout système normalisé de points pondérés $(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_k, \lambda_k) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$, on a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathcal{E}$.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine. D'après la proposition 1.3.7, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i}\right) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{f}\,(\overrightarrow{x_0x_i}) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{f(x_0)f(x_i)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i).$$

Réciproquement, supposons que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ respecte les barycentres. Alors, d'après le lemme 1.3.14, pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et tout $\lambda \in E$, on a $x_0 + \vec{u} + \lambda\vec{v} = \mathrm{Bar}((x_0 + \vec{u}, 1), (x_0 + \vec{v}, \lambda), (x_0, -\lambda))$ et donc $f(x_0 + \vec{u} + \lambda\vec{v})) = f(x_0 + \vec{u}) + \lambda f(x_0 \vec{v}) - \lambda f(x_0) = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \vec{u})} + \lambda\overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \vec{v})}$, encore d'après la proposition 1.3.7. Mais donc $\overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \vec{u} + \lambda\vec{v})}) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \vec{u})} + \lambda\overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \vec{v})}$ et f est affine d'après la proposition 1.2.5. □

1.3.2 Convexité

Cette section ne concerne que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1.3.18. On dit qu'un sous-ensemble $X \subset \mathcal{E}$ est *convexe* s'il est stable par barycentre à coefficients positifs.

Remarque 1.3.19. Bien entendu, en normalisant, on peut se limiter aux coefficients positifs dont la somme vaut 1.

Exemples 1.3.20.

- Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on appelle *segment entre x et y*, noté $[x, y]$, l'ensemble $\{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu > 0\}$. Intuitivement, cela correspond aux points de la droite (xy) situés "entre" les points x et y et cela forme un ensemble convexe.
- Tout sous-espace affine est convexe.
- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Proposition 1.3.21. Un ensemble $X \subset \mathcal{E}$ est convexe ssi, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $[x, y] \subset \mathcal{E}$.

Démonstration. L'implication directe est immédiate. Réciproquement, supposons qu'un ensemble contient tous les segments entre deux de ses points, autrement dit qu'il est stable par barycentre de deux de ses points à coefficients positifs. A l'aide de l'associativité des barycentres, on montre alors récursivement qu'il est stable par barycentres de k de ses points à coefficients positifs, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. □

Proposition 1.3.22. Une intersection quelconque de sous-espaces convexes est convexe.

Démonstration. Immédiat. □

Définition 1.3.23. Pour tout sous-ensemble $X \subset \mathcal{E}$ non vide, on appelle *enveloppe convexe de X*, notée $\mathrm{Conv}(X)$ l'intersection de tous les sous-ensemble convexes de $\mathcal{E}$ contenant X. Cela correspond au plus petit sous-ensemble convexe de $\mathcal{E}$ contenant X.

Exemples 1.3.24.

1. Pour tous points $x, y \in \mathcal{E}$, $\mathrm{Conv}(\{x, y\}) = [x, y]$.
2. L'enveloppe convexe de trois points définie "l'intérieur" d'un triangle.

Proposition 1.3.25. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$ non vide, on a

$$\mathrm{Conv}(X) = \left\{\mathrm{Bar}(\mathcal{S}) \;\middle|\; \mathcal{S} \text{ système de points de } X \text{ pondérés à coefficients positifs}\right\}.$$

Démonstration. La preuve est totalement similaire à celle du corollaire1.3.16 □

Corollaire 1.3.26. Pour tout $X \subset \mathcal{E}$, on a $\mathrm{Conv}(X) \subset \mathrm{Aff}(X)$.

Proposition 1.3.27. L'image (resp. image réciproque) d'un sous-ensemble convexe par une application affine est un sous-ensemble convexe.

Démonstration. Considérons $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine.

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ convexe. Pour tous $x, y \in f(\mathcal{G})$ on a $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{G}$ tels que $x = f(\tilde{x})$ et $y = f(\tilde{y})$; et pour tous $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a alors, d'après la proposition 1.3.17, $\lambda x + \mu y = \lambda f(\lambda\tilde{x}) + \mu f(\tilde{y}) = f(\lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}) \in f(\mathcal{G})$ car $\mathcal{G}$ convexe. On en déduit que $[x, y] \subset f(\mathcal{G})$ et on conclut alors d'après la proposition 1.3.21.

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ convexe. Pour tous $x, y \in f^{-1}(\mathcal{G})$ et tous $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in \mathcal{G}$ car $\mathcal{G}$ est convexe. Comme dans le cas de l'image directe, on en conclut que $f^{-1}(\mathcal{G})$ est convexe. □

Terminons par quelques résultats sans preuves.

Théorème 1.3.28 (Carathéodory)**.** Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et si $\Omega \subset \mathcal{E}$ est un sous-ensemble fini, alors tout élément de $\mathrm{Conv}(\Omega)$ est dans l'enveloppe convexe d'au plus $n + 1$ points de Ω.

Démonstration. Voir TD2. □

Théorème 1.3.29 (Helly)**.** Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille finie de parties convexes de $\mathcal{E}$, alors $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ ssi, pour tout sous-famille $J \subset I$ avec $\mathrm{Card}(J) \leq n+1$, $\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$.

Définition 1.3.30. Soit $C \subset \mathcal{E}$ une partie convexe. On dit que $x \in C$ est un *point extrémal* de C si $C \setminus \{x\}$ est encore convexe.

Proposition 1.3.31. Un point x d'une partie convexe $C \subset \mathcal{E}$ est extrémal si et seulement si, pour tout $y_1, y_2 \in C$, $x \in [y_1, y_2] \Rightarrow x = y_1$ ou $x = y_2$.

Théorème 1.3.32 (Krein-Milman)**.** Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie, alors toute partie convexe compacte est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

1.4 Repères et bases affines

On ne considérera, dans ce qui suit, que des espaces affnes de dimension finie et on notera $n_{\mathcal{E}}$, ou simplement n lorsqu'il n'y a aucune ambiguité, la dimension d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1.4.1 Repères affines

Définition 1.4.1. On appelle *repère de* $\mathcal{E}$ tout $(n+1)$–uplet $(o, e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{E} \times E^n$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ forme une base de E.

Exemple 1.4.2. Le repère canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\left((0,\ldots,0), \overrightarrow{(1,0,\ldots,0)}, \overrightarrow{(0,1,0,\ldots,0)}, \ldots, \overrightarrow{(0,\ldots,0,1,0)}, \overrightarrow{(0,\ldots,0,1)}\right)$. On note ici des flèches au-dessus des éléments de E vu comme des vecteurs afin de les distinguer des éléments de E vu comme des points.

Remarque 1.4.3. Un repère $R = (o, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{E}$ étant fixé, il existe, pour tout $x \in \mathcal{E}$, d'uniques $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = o + \sum_{i=1^n} \lambda_i e_i$. Il s'agit des coordonnés du vecteur $\overrightarrow{ox}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Définition 1.4.4. Soit $R = (o, e_1, \ldots, e_n)$ un repère de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on appelle *coordonnées de x dans le repère R* l'unique antécédent de x par la bijection

$$\varphi_R : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & o + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array}.$$

Proposition 1.4.5. Pour tout repère R, l'application φ_R est une bijection affine. Tout espace affine de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{K}$ est donc (non canoniquement) isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Définition 1.4.6. On appelle *représentation paramétrique* d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ toute application φ_R où R est un repère pour $\mathcal{F}$.

Exemples 1.4.7.

- La droite $(x_0, y_0, z_0) + \mathbb{R}.\overrightarrow{(a,b,c)}$ dans $\mathbb{R}^3$ est paramétrisée par $(\lambda \mapsto (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c))$.
- Le plan $(x_0, y_0, z_0) + (\mathbb{R}.\overrightarrow{(a,b,c)} \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{(a',b',c')})$ dans $\mathbb{R}^3$ est paramétrisé par

$$(\lambda, \mu) \mapsto (x_0 + \lambda a + \mu a', y_0 + \lambda b + \mu b', z_0 + \lambda c + \mu c').$$

Définition 1.4.8. Soit R un repère pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. On appelle *représentation cartésienne* de $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ dans un repère R tout couple $(A, B) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n_{\mathcal{E}} - n_{\mathcal{F}}, n_{\mathcal{E}}) \times \mathbb{K}^{n_{\mathcal{E}} - n_{\mathcal{F}}}$ matrice–vecteur tel que, pour tout $X \in \mathbb{K}^{n_{\mathcal{E}}}$, $(\varphi_R(X) \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow (AX + B = 0)$.

Remarque 1.4.9. La condition $AX + B = 0$ peut se réécrire comme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & A & & B \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

Exemples 1.4.10.

- Une droite dans $\mathbb{R}^2$ est caractérisée par son équation $ax + by + c = 0$.
- Un plan dans $\mathbb{R}^3$ est caractérisé par son équation $ax + by + cz + d = 0$.
- Une droite dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrite comme intersection de deux plans, lesquels peuvente être caractérisés, respectivement, par $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. La droite est alors caractérisée par $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix} = 0$ ou, de manière équivalente, par $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right)$.
- L'espace $\mathcal{E}$ entier est décrit par $0.X + 0 = 0$.

Proposition 1.4.11. Un repère de $\mathcal{E}$ étant donné, tout sous-espace affine admet une représentation cartésienne dans ce repère.

Démonstration. Voir TD2. □

Définition 1.4.12. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ munis, respectivement, de repères $R_{\mathcal{E}} = (o_{\mathcal{E}}, e_1, \ldots, e_{n_{\mathcal{E}}})$ et $R_{\mathcal{F}} = (o_{\mathcal{F}}, f_1, \ldots, f_{n_{\mathcal{F}}})$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. On a appelle *matrice de f dans les bases $R_{\mathcal{E}}$ et $R_{\mathcal{F}}$* la matrice

$$\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f) := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_{n_{\mathcal{F}}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

où A est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_{n_{\mathcal{E}}})$ et $(f_1, \ldots, f_{n_{\mathcal{F}}})$, et où $\varphi_{R_{\mathcal{F}}}(b_1, \ldots, b_{n_{\mathcal{F}}}) = f(o_{\mathcal{E}})$.

Proposition 1.4.13. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_{\mathcal{E}}} \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_{\mathcal{F}}} \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

avec $\varphi_{R_{\mathcal{E}}}(x_1, \ldots, x_{n_{\mathcal{E}}}) = x$ et $\varphi_{R_{\mathcal{F}}}(y_1, \ldots, y_{n_{\mathcal{F}}}) = f(x)$.

Démonstration. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a $f(o_{\mathcal{E}} + \overrightarrow{u}) = f(o_{\mathcal{E}}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = o_{\mathcal{F}} + \overrightarrow{o_{\mathcal{F}} f(o_{\mathcal{E}})} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. Or un calcul direct montre que le produit matriciel de $\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f)$ par le vecteur-colonne de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{n_{\mathcal{E}}})$ calcule justement les coordonnés de $\overrightarrow{o_{\mathcal{F}} f(o_{\mathcal{E}})} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ dans la base $(f_1, \ldots, f_{n_{\mathcal{F}}})$. □

Proposition 1.4.14. Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois espaces affines munis, respectivement, de repères $R_{\mathcal{E}}$, $R_{\mathcal{F}}$ et $R_{\mathcal{G}}$. Alors pour toutes applications $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, on a $\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{G}}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{F}},R_{\mathcal{G}}}(g).\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f)$.

Démonstration. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathcal{E}$, on a $(g \circ f)(o_{\mathcal{E}} + \overrightarrow{u}) = o_{\mathcal{G}} + \overrightarrow{o_{\mathcal{G}} g(o_{\mathcal{F}})} + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{o_{\mathcal{F}} f(o_{\mathcal{E}})}) + (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{u})$. Or

$$\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{F}},R_{\mathcal{G}}}(g).\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} & B.A & & B.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_{\mathcal{F}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n_{\mathcal{G}}} \end{pmatrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

avec A et B les matrices de $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ dans les bases induites par $R_{\mathcal{E}}$, $R_{\mathcal{F}}$ et $R_{\mathcal{G}}$, $\varphi_{R_{\mathcal{F}}}(b_1, \dots, b_{n_{\mathcal{F}}}) = f(o_{\mathcal{E}})$ et $\varphi_{R_{\mathcal{G}}}(c_1, \dots, c_{n_{\mathcal{G}}}) = g(o_{\mathcal{F}})$. □

Définition 1.4.15. Pour $R_{\mathcal{E}}$ et $R'_{\mathcal{E}}$ deux repères de $\mathcal{E}$, on note $\mathrm{Mat}(R_{\mathcal{E}}, R'_{\mathcal{E}}) := \mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R'_{\mathcal{E}}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$ la matrice dite *de passage* qui calcule les coordonnées d'un point dans le repère $R'_{\mathcal{E}}$ à partir des coordonnées de ce point dans le repère $R_{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.4.16. Pour tous repères $R_{\mathcal{E}}, R'_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$, on a $\mathrm{Mat}(R'_{\mathcal{E}}, R_{\mathcal{E}}) = \mathrm{Mat}(R_{\mathcal{E}}, R'_{\mathcal{E}})^{-1}$.

Proposition 1.4.17. Soit $R_{\mathcal{E}}, R'_{\mathcal{E}}$ deux repères pour $\mathcal{E}$, et $R_{\mathcal{F}}, R'_{\mathcal{F}}$ deux repères pour $\mathcal{E}$. Alors pour toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{R'_{\mathcal{E}},R'_{\mathcal{F}}}(f) = \mathrm{Mat}(R_{\mathcal{F}}, R'_{\mathcal{F}}).\mathrm{Mat}_{R_{\mathcal{E}},R_{\mathcal{F}}}(f).\mathrm{Mat}(R'_{\mathcal{E}}, R_{\mathcal{E}})$$

1.4.2 Bases affines

Proposition 1.4.18. Pour tout famille finie $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{E}$ de points, on a $\dim\Big(\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})\Big) \leq k$.

Démonstration. L'espace directeur de $\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})$ est engendré par les k vecteur $\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_k}$. □

Définition 1.4.19. On dit que $k + 1 \in \mathbb{N}^*$ points $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{E}$ sont *affinement libres* si $\dim(\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})) = k$.
On dit qu'ils *engendrent* $\mathcal{E}$ si $\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\}) = \mathcal{E}$
On appelle *base affine* de $\mathcal{E}$ toute famille affinement libre de $\mathcal{E}$ engendrant $\mathcal{E}$.

Proposition 1.4.20. Toute base affine de $\mathcal{E}$ contient $n_{\mathcal{E}} + 1$ points.

Exemples 1.4.21.

1. Deux points distincts d'une droite affine forment une base affine de cette droite.

2. Trois points non alignés d'un plan affine forment une base de ce plan.

Proposition 1.4.22. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$.

1. Les points $x_0, \dots, x_n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_k}$ forment une famille libre de E.

2. Les points $x_0, \dots, x_n$ engendrent $\mathcal{E}$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_k}$ engendrent E.

3. Les points $x_0, \dots, x_n$ forment une base affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Démonstration. Chacune des propositions provient du fait que $\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\}) = x_0 + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots \overrightarrow{x_0x_k}\})$ et donc que l'espace directeur de $\mathrm{Aff}(\{x_0, \dots, x_k\})$ est $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots \overrightarrow{x_0x_k}\})$. □

Proposition 1.4.23. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = x$.

Démonstration. L'existence provient du corollaire 1.3.16. Pour l'unicité, supposons que $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^n \mu_i x_i$. On a alors $x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = x_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{x_0 x_i}$ et donc $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i)\overrightarrow{x_0 x_i} = \overrightarrow{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}$ formant une base de E, on en déduit que $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Enfin, on a $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \sum_{i=1}^n \mu_i = \mu_0$. □

Définition 1.4.24. On appelle *coordonnées barycentriques* d'un point $x \in \mathcal{E}$ dans la base ordonnée $(x_0, \dots, x_n)$ les uniques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Contrairement aux repères affines, les bases ne mettent pas un point en avant. Les coordonnées barycentriques se révéleront, par exemple, intéressantes pour traiter les propriétés d'un triangle dans le plan.

Proposition 1.4.25. Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$.

1. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est :
   (a) injective ssi $f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathcal{F}$ forment une famille affinement libre ;
   (b) surjective ssi $f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathcal{F}$ engendrent $\mathcal{F}$;
   (c) bijective si et seulement si $f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathcal{F}$ est une base affine de $\mathcal{F}$; les coordonnées barycentriques de tout point $f(x) \in \mathcal{F}$ dans la base ordonnée $(f(x_0), \dots, f(x_n))$ sont alors égales aux coordonnées barycentriques de x dans la base $(x_0, \dots, x_n)$.
2. Si $\mathcal{F}$ est un espace affine de dimension n, alors pour toute base affine $y_0, \dots, y_n \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$, il existe une unique bijection affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Les deux premiers points et la première partie du troisième sont des conséquences des propositions 1.4.22 et 1.2.8.

La seconde partie du troisième point et le dernier point sont des conséquences de la proposition 1.3.17. □

Proposition 1.4.26. Soit $B := (x_0, \dots, x_n)$ une base ordonnée de $\mathcal{E}$. Soit $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{E}$ et notons, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i)$ les coordonnées barycentriques de y_i dans B. Alors, pour tout $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$, les cordonnées barycentriques de $\sum_{i=1}^n \mu_i y_i$ dans B sont

$$\left(\sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_0^i \, , \ \cdots \ , \ \sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_n^i \right).$$

Démonstration. On applique la proposition précédente à $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$ muni de la base affine

$$(0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \cdots, (0, \dots, 0, 1).$$

□

2 Géométrie euclidienne

Dans cette section, on ne considère plus que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Espaces euclidiens

2.1.1 Cas vectoriel

Définition 2.1.1. On appelle *produit scalaire* sur un espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie postive, c'est-à-dire toute application $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \langle u|v \rangle \end{array}$ tels que

- pour tout $u \in E$, les applications $(v \mapsto \langle u|v\rangle)$ et $(v \mapsto \langle v|u\rangle)$ soient linéaires ;
- pour tout $u, v \in E$, $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$;
- pour tout $u \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, $\langle u|u\rangle > 0$.

On appelle *espace vectoriel euclidien*, tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples 2.1.2.

- Sur $\mathbb{R}^n$, l'application $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_i y_i =: \Big\langle (x_1, \cdots, x_n) \Big| (y_1, \cdots, y_n) \Big\rangle_2$ est un produit scalaire. On l'appelle produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Sur $E := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ continues}\}$, l'application $\Big((f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt\Big)$ est un produit scalaire. Cela ne fait toutefois pas de E un espace euclidien car il est de dimension infinie.

Dans tout ce qui suit, et sauf mention explicite contraire, on considérera que E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Notation 2.1.3. Pour tout $u \in E$, on note $||u||$ la quantité $\sqrt{\langle u|u\rangle}$. Dans le cas du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on note $||u||_2$.

Proposition 2.1.4 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** Pour tout $u, v \in E$, on a $|\langle u|v\rangle| \leq ||u||.||v||$ avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration. Soit $u, v \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2||v||^2 + 2t\langle u|v\rangle + ||u||^2 = ||u + t.v||^2 \geq 0$. Il s'agit d'un polynôme réel du second degré en t qui reste positif. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne $4(\langle u|v\rangle)^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0$, c'est-à-dire $|\langle u|v\rangle| \leq ||u||.||v||$.

En cas d'égalité, le discriminant s'annule donc et il existe une racine double $t_0 \in \mathbb{R}$ au polynôme. On a alors $||u + t_0.v||^2 = 0$ et donc $u + t_0.v = 0$. les vecteurs u et v sont donc colinéaires. □

Corollaire 2.1.5 (Inégalité de Minkowski)**.** Pour tout $u, v \in E$, $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ avec égalité si et seulement u et v sont positivement colinéaires.

Démonstration. Soit $u, v \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u|v\rangle + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u|v\rangle| + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||.||v|| + ||v||^2 = \Big(||u|| + ||v||\Big)^2.$$

Les quantité $||u + v||$ et $||u|| + ||v||$ étant positives, on en déduit le résultat.

D'après la suite d'inégalité ci-dessus, on a, en cas d'égalité,

- $|\langle u|v\rangle| = ||u||.||v||$ et donc $u = t.v$ avec $t \in \mathbb{R}$ d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy–Schwarz ;
- $\langle u|v\rangle = |\langle u|v\rangle|$, c'est-à-dire $\langle u|v\rangle \geq 0$. Or $\langle u|v\rangle = \langle t.v|v\rangle = t||v||^2$. Si $v = 0$, alors $u = 0$ et donc $u = 1.v$; sinon $t = \frac{\langle u|v\rangle}{||v||^2} \geq 0$.

□

Définition 2.1.6. On appelle *espace vectoriel normé* tout espace vectoriel E munie d'une norme, c'est-à-dire d'une application $|| \,.\, || : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $\forall u \in E, ||u|| = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = |\lambda|.||u||$;
- $\forall u, v \in E, ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Proposition 2.1.7. Tout espace vectoriel euclidien est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel normé par l'application $\left(u \mapsto \|u\| := \sqrt{\langle u|u\rangle}\right)$.

Remarque 2.1.8. Réciproquement, on peut déterminer le produit scalaire à partir de la norme en utilisant l'une des formules $\langle u|v\rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2)$ ou $\langle u|v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ qui se vérifient, pour tout $u, v \in E$ par un calcul direct.

Définition 2.1.9. Soit $u, v \in E$. On dit que u est *unitaire* si $\|u\| = 1$. On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u|v\rangle = 0$.

Notation 2.1.10. Pour tout $X \subset E$, on note $X^\perp := \{u \in E \mid \forall v \in X, \langle u|v\rangle = 0\}$. On dit que deux sous-ensembles $X, Y \subset E$ sont *orthogonaux* si $Y \subset X^\perp$ ou, de manière équivalente, si $X \subset Y^\perp$.

Proposition 2.1.11. Pour tout $X \subset E$, $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel, et pour tout $F \subset E$ sous-espace vectoriel, on a $F \oplus F^\perp = E$.

Démonstration. L'ensemble $X^\perp$ est clairement stable par combinaison linéaire.

Pour la seconde assertion, commençons par remarquer que $F \cap \mathbb{F}^\perp = \{0\}$. En effet, pour tout $u \in F \cap F^\perp$, on a $\langle u|u\rangle = 0$ car $u \in F^\perp$ et $u \in F$, et donc $u = 0$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

On fixe $e_1, \ldots, e_k \in F$ une base de F et on considère l'application

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ u & \longmapsto & \left(\langle u|e_1\rangle, \ldots, \langle u|e_k\rangle\right) \end{array}.$$

Cette application est linéaire et on a clairement $F^\perp = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Elle est de plus surjective car $\varphi_{|F}$ est même un isomorphisme. En effet, on a $\mathrm{Ker}(\varphi_{|F}) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap F = F^\perp \cap F = \{0\}$, l'application $\varphi_{|F}$ est donc une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension. D'après le théorème du rang, on a donc $\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right) + k = \dim(E)$. □

Corollaire 2.1.12. Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Définition 2.1.13. On dit qu'une base $(e_1, \cdots, e_n)$ est une *base orthonormée* (BON) si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ où δ est le symbole de Kronecker ; autrement dit si tous les éléments de la base sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Proposition 2.1.14. Pour tout espace vectoriel euclidien, il existe une base orthonormé.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace E. Si $E = \{0\}$ alors le résultat est clair. Sinon, on fixe $u \in E \setminus \{0\}$ et on pose $u_1 := \frac{u}{\|u\|}$ qui est de fait unitaire. On a alors $\dim\left((\mathbb{R}.u)^\perp\right) = \dim(E) - \dim(\mathbb{R}.u) = \dim(E) - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormé sur $(\mathbb{R}.u)^\perp$ que l'on peut compléter avec u_1 en une base orthonormé de E. □

Remarque 2.1.15. L'algorithme de Gram–Schmidt, qui déforme n'importe quelle base de E en une base orthonormée, fournit une autre preuve, légèrement plus constructive, de l'existence de bases orthonormées.

Proposition 2.1.16. En notant $(x_1 \cdots, x_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans une BON donnée, on a pour tout $u, v \in E$, $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Démonstration. En notant $e_1, \ldots, e_n$ les éléments de la BON, on a

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i,j=1}^n u_1 v_j \langle e_i|e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n u_1 v_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

□

Corollaire 2.1.17. Tout espace euclidien de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Démonstration. On fixe une BON d'un espace euclidien E et on considère l'application $f : E \to \mathbb{R}^n$ qui envoie tout élément sur son vecteur–coordonnées dans cette base. □

2.1.2 Cas affine

Définition 2.1.18. On appelle *espace affine euclidien* tout espace affine de dimension finie dont l'espace directeur est muni d'un produit scalaire.

Définition 2.1.19. On appelle *distance* sur un ensemble X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que

- pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemples 2.1.20.

- Sur $\mathbb{R}$, l'application $\big((x, y) \mapsto |x - y|\big)$ est une distance.
- Sur tout espace vectoriel normé, l'application $\big((u, v) \mapsto \|u - v\|\big)$ est une distance.
- Sur les mots d'une longueur donnée, l'application qui compte les emplacements où les lettres de deux mots diffèrent est une distance.

Proposition 2.1.21. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien, alors l'application $d : (x, y) \mapsto \|\overrightarrow{xy}\|$ définit une distance sur $\mathcal{E}$.

Exemple 2.1.22. La structure affine canonique associée à un espace vectoriel euclidien E fait de E un espace affine euclidien dont la distance est celle associée à la norme, elle-meme associée au produit scalaire.

Dans tout ce qui suit,et sauf mention contraire explicite, on considérera que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension n dont l'espace directeur E est muni du produit scalaire $((u, v) \mapsto \langle u|v\rangle)$. On notera alors $d(x, y)$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Définition 2.1.23. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont *orthogonaux* si F et G sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.

Remarque 2.1.24. Il ne faut pas confondre orthogonalité et perpendicularité. On peut en effet définir cette seconde notion en toute généralité. Dans le cas de droites dans un plan affine, ces notions coincident, mais en général elles sont distinctes. Voir TD5.

Définition 2.1.25. On dit qu'un repère $(o, e_1, \cdots, e_n)$ est *orthonormé* si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E.

Proposition 2.1.26. En notant $(x_1 \cdots, x_n)$ les coordonnées de $x \in \mathcal{E}$ dans un repère orthonormé donnée, on a pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $d(x, y) = \|(x_1 - y_1, \cdots, x_n - y_n)\|_2$.

2.2 Isométries

2.2.1 Cas vectoriel

Définition 2.2.1. On dit que $f \in \mathrm{End}(E)$ est une *isométrie vectorielle* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "\langle\,.\,|\,.\,\rangle"] \arrow[d, "f\times f"'] & \mathbb{R} \\ E \times E \arrow[ur, "\langle\,.\,|\,.\,\rangle"'] & \end{tikzcd} ;$$

autrement dit, si f préserve le produit scalaire dans le sens où, pour tout $u, v \in E$, $\langle f(u)|f(v)\rangle = \langle u|v\rangle$.

Exemples 2.2.2.

1. L'identité est une isométrie vectorielle.
2. Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, l'application $s_F : E \to E$ définie par $s_F := \mathrm{Id}_{|F} \oplus (-\mathrm{Id}_{|F^\perp})$ est une isométrie vectorielle. En effet, cette application est bien définie car $F \oplus F^\perp = E$ et en écrivant, pour tout $x \in E$, $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$, on a bien

$$\begin{aligned} \Big\langle s_F(x)\Big|s_F(y)\Big\rangle &= \langle x_F - x_{F^\perp}|y_F - y_{F^\perp}\rangle = \langle x_F|y_F\rangle - \langle x_F|y_{F^\perp}\rangle - \langle x_{F^\perp}|y_F\rangle + \langle x_{F^\perp}|y_{F^\perp}\rangle = \langle x_F|y_F\rangle + \langle x_{F^\perp}|y_{F^\perp}\rangle \\ &= \langle x_F|y_F\rangle + \langle x_F|y_{F^\perp}\rangle + \langle x_{F^\perp}|y_F\rangle + \langle x_{F^\perp}|y_{F^\perp}\rangle = \langle x_F + x_{F^\perp}|y_F + y_{F^\perp}\rangle = \langle x|y\rangle, \end{aligned}$$

car $\langle x_F|y_{F^\perp}\rangle = \langle x_{F^\perp}|y_F\rangle = 0$. L'application s_F est appelée *symétrie par rapport à* F, et lorsque F est un hyperplan, on parle de *réflexion*.

Proposition 2.2.3.

1. Un morphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\|\,.\,\|"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}_+ \\ E \arrow[ur, "\|\,.\,\|"'] & \end{tikzcd} .$$

2. Une isométrie vectorielle est bijective.
3. Si $F \subset E$ est stable par une isométrie vectorielle f, alors $F^\perp$ l'est aussi.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Si f est une isométrie vectorielle, alors $\|f(u)\|^2 = \Big\langle f(u)\Big|f(u)\Big\rangle = \langle u|u\rangle = \|u\|^2$ pour tout $u \in E$. Réciproquement, si $\|f(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$, alors

$$\Big\langle f(u)\Big|f(v)\Big\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|f(u) + f(v)\| - \|f(u) - f(v)\|\Big) = \frac{1}{4}\Big(\|f(u+v)\| - \|f(u-v)\|\Big) = \frac{1}{4}\Big(\|u+v\| - \|u-v\|\Big) = \langle u|v\rangle,$$

pour tout $u, v \in E$ et f est donc une isométrie vectorielle.

Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ une isométrie vectorielle et $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $\|u\| = \|f(u)\| = 0$ et donc $u = 0$.

Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ une isométrie vectorielle et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par f. Soit $u \in F^\perp$ et $v \in F$. L'application f étant une isométrie vectorielle, elle est injective et $f_{|F} : F \to F$ est de fait bijective. Il existe donc $w \in F$ tel que $f(w) = v$. On a alors $\Big\langle f(u)\Big|v\Big\rangle = \Big\langle f(u)\Big|f(w)\Big\rangle = \langle u|w\rangle = 0$ et donc $f(u) \in F^\perp$. Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est donc stable par f. □

Proposition 2.2.4. Toute composé et toute réciproque d'isométries vectorielles sont des isométries vectorielles.

Définition 2.2.5. On appelle $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, on note $O(n)$.

Proposition 2.2.6. Pour tout espace vectoriel euclidien, on a $\mathrm{O}(E) \cong O(\dim(E))$.

Pour un groupe, il est toujours intéressant de connaitre un système de générateurs.

Proposition 2.2.7. Toute isométrie vectorielle s'écrit comme produit d'au plus $\dim(E)$ réflexions.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n := \dim(E)$. Si $n = 0$, le résultat est clair.

Si $n > 0$, on considère une isométrie f et on fixe un vecteur $u \in E \setminus \{0\}$. Si $f(u) = u$, on pose $r = \mathrm{Id}$. Sinon, on a $f(u) \neq u$, et on pose r la réflexion orthogonale par rapport à $H := \mathrm{Vect}(f(u) - u)^\perp$. Dans les deux cas, on a $(r \circ f)(u) = u$. C'est clair dans le premier cas. Dans le second peut remarquer que $u - f(u)$ et $u + f(u)$ sont orthogonaux car

$$\left\langle u - f(u) \middle| u + f(u) \right\rangle = \langle u|u\rangle + \left\langle u \middle| f(u) \right\rangle - \left\langle f(u) \middle| u \right\rangle - \left\langle f(u) \middle| f(u) \right\rangle = \langle u|u\rangle - \langle u|u\rangle = 0.$$

Or $f(u) = \frac{1}{2}(u + f(u)) - \frac{1}{2}(u - f(u))$, et cela donne la décomposition de $f(u)$ dans $H \oplus H^\perp$. De fait, cela donne $r(f(u)) = \frac{1}{2}(u + f(u)) + \frac{1}{2}(u - f(u)) = u$ et donc $(r \circ f)(u) = u$.

Le sous-espace $\mathrm{Vect}(u)$ est donc stable par l'isométrie $r \circ f$, et donc l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $(r \circ f)_{|\mathrm{Vect}(u)^\perp}$ s'écrit comme $\tilde{r}_1 \circ \cdots \tilde{r}_k$ avec $k \leq n - 1$. et où chaque $\tilde{r}_i$ est une réflexion orthogonale par rapports à un hyperplan $\widetilde{H}_i$ de $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. On pose alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $H_i = \widetilde{H}_i \oplus \mathrm{Vect}(u) \subset E$ et r_i la réflexion orthgonale par rapport à H_i. Par construction, on a $(r_i)_{|\mathrm{Vect}(u)^\perp} = \tilde{r}_i$ et donc $(r_1 \circ \cdots \circ r_k)_{|\mathrm{Vect}(u)^\perp} = (r \circ f)_{|\mathrm{Vect}(u)^\perp}$. Mais $(r_1 \circ \cdots \circ r_k)$ et $r \circ f$ coïncident aussi sur $\mathrm{Vect}(u)$ car tout le monde fixe u. Au final, $r_1 \circ \cdots \circ r_k = r \circ f$ et donc $f = r \circ r_1 \circ \cdots \circ r_k$ puisque $r^2 = \mathrm{Id}$. □

Etudions maintenant le comportement des isométries vectorielles vis-à-vis des BON.

Proposition 2.2.8. Soit $\mathcal{B}$ une BON. L'application $f \in \mathrm{End}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle envoie $\mathcal{B}$ sur une BON. De plus, pour toute BON $\mathcal{B}'$, il existe une unique isométrie vectorielle envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Soit $e_1, \dots, e_n$ une BON.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie vectorielle. Alors, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\left\langle f(e_i) \middle| f(e_j) \right\rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. Les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ forment donc une BON de E.

Réciproquement, soit $f \in \mathrm{End}(E)$ telle que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ soit une BON de E. Alors, pour tout $x =: \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $y =: \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in E$, on a

$$\left\langle f(x) \middle| f(y) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \left\langle f(e_i) \middle| f(e_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle e_i | e_j \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Enfin, si l'on se donne deux bases de E, il existe une unique application linéaire envoyant la première sur la seconde, et d'après ce qui précède, cette application est alors une isométrie vectorielle. □

Corollaire 2.2.9. Soit $\mathcal{B}$ une BON. Un morphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est une isométrie si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Mat}^t_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Id}$. On a alors notamment $\mathrm{Mat}^{-1}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}^t_{\mathcal{B}}(f)$ et $\det(f) = \pm 1$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, f est une isométrie si et seulement si l'image des éléments $e_1, \dots, e_n$ de $\mathcal{B}$ forment une BON. Or les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ donnent justement les vecteurs–coordonnées de ces images dans la base $\mathcal{B}$. Et d'après, la proposition 2.1.16, le coefficients a_{ij} de $\mathrm{Mat}^t_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ correspond au produit scalaire $\left\langle f(e_i) \middle| f(e_j) \right\rangle$. Le résultat s'ensuit. □

Lemme 2.2.10. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et valeur propre d'une isométrie vectorielle, alors $\lambda = \pm 1$. De plus, si u_+ et u_- sont deux vecteurs propres d'une isométrie vectorielle, associés respectivements aux valeurs propres 1 et -1, alors u_+ et u_- sont orthogonaux.

Démonstration. Soit f une isométrie vectorielle. Si $f(x) = \lambda x$, alors $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$. Donc si $\|x\| \neq 0$, on a $|\lambda| = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$.

Si u_+ et u_- sont des vecteurs propres de f associées aux valeurs propres 1 et -1, alors $\langle u_+ | u_- \rangle = \left\langle f(u_+) \middle| f(u_-) \right\rangle = \langle u_+ | - u_- \rangle = -\langle u_+ | u_- \rangle$ et donc $\langle u_+ | u_- \rangle = 0$. □

Proposition 2.2.11. On a $O(1) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ et, pour tout élément $f \in O(2)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si $\det(f) = -1$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in]-\pi, \pi]$ si $\det(f) = 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\det(f) = -1$. Le polynôme caractéristique de f est $X^2 - \mathrm{Tr}(f)X + \det(f)$, de discriminant $(\mathrm{Tr}(f))^2 - 4\det(f) = (\mathrm{Tr}(f))^2 + 4 > 0$. L'application f possède donc deux valeurs propres distinctes.D'après le lemme 2.2.10, ces valeurs propres ne peuvent être que 1 et -1. On choisit des vecteurs propres unitaires u_1 et u_{-1} pour chacune de ces valeurs propres. Toujours d'après le lemme 2.2.10, ceux-ci forment alors une BON, et la matrice dans cette base est telle que souhaitée.

Supposons maintenant que $\det(f) = 1$. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ et on note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Puisque f est une isométrie, $\mathrm{Mat}_B(f)$ est orthogonale et on a donc $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$. Notamment, on a $|a|, |c| \leq 1$ et il existe donc $\theta, \varphi \in [0, \pi]$ tels que $a = \cos(\theta)$ et $c = \cos(\varphi)$. Mais alors $|b| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = |\sin(\theta)|$ et de même $|d| = |\sin(\varphi)|$. Quitte à changer le signe de θ et/ou de φ, on peut donc supposer que $b = \sin(\theta)$ et $d = \sin(\varphi)$. Mais $\det(f) = ad - bc = \cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) = \cos(\theta + \varphi) = 1$, avec $\theta + \varphi \in]-2\pi, 2\pi]$. Donc soit $\theta + \varphi = 0$ et alors $\varphi = -\theta$, soit $\varphi + \theta = 2\pi$, mais alors $\theta = \varphi = \pi$, et φ peut être remplacé par $-\pi = -\theta$. Au final, on en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =: \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

□

Définition 2.2.12. On appelle rotation vectorielle toute isométrie de $O(2)$ possédant une matrice de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans un BON.

Théorème 2.2.13 (Classification des isométries vectorielles)**.** Pour tout élément de $O(n)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix}$$

pour certains $\theta_1, \cdots, \theta_m \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est clair.

Si $n > 1$, il y a deux cas. Si f admet une valeur propre λ réelle, on a $\lambda = \pm 1$ et, en considèrant x_0 un vecteur propre associé à λ, on peut travailler récursivement et indépendemment sur $\mathbb{R}.x_0$ et $(\mathbb{R}.x_0)^\perp$.
Si f n'admet pas de valeur propre réelle, alors son polynôme caractéristique ξ s'écrit $\xi_1 \cdots \xi_k$ avec ξ_i polynôme irréductible de degré 2. D'après le théorème de Caylay–Hamilton, on a alors $\xi(f) = \xi_1(f) \circ \cdots \circ \xi_k(f) = 0$, et donc l'un au moins des $\xi_i(f)$ n'est pas injectif. On fixe un tel indice i_0 et un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $\xi_{i_0}(f)(x_0) = 0$. Le vecteur $f^2(x_0)$ s'écrit alors comme combinaison linéaire de x_0 et $f(x_0)$ et l'espace $F = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0))$ est stable par f. La restriction $f_{|F}$ n'a pas de valeur propre réelle, elle en a donc deux complexes conjuguées $\lambda, \overline{\lambda}$ et on a $\det(f_{|F}) = \lambda\overline{\lambda} > 0$, et donc $\det(f) = 1$. Au final, dans n'importe quelle base orthonormée $\mathcal{B}$ pour F, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{|F}) \in \mathrm{SO}(2)$. On conclut d'après la proposition 2.2.11 et par hypothèse de récurrence appliquée à $f_{|F^\perp}$. □

2.2.2 Cas affine

Définition 2.2.14. On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une *isométrie* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}\times\mathcal{E} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f\times f"'] & \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{E}\times\mathcal{E} \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd} ;$$

autrement dit, si f préserve la distance dans le sens où, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition 2.2.15. Toute isométrie est une application affine.

Démonstration. Voir TD6. □

Exemples 2.2.16.

1. Les translations sont des isométries, mais ne sont pas des isométries vectorielles.
2. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ le long de $F^\perp$ est une isométrie. On parle alors *symétrie orthogonale par rapport à* $\mathcal{F}$ ou de *réflexion orthogonale* si $\mathcal{F}$ est un hyperplan.

Remarque 2.2.17. Un espace vectorielle euclidien est naturellement munie d'une distance. En oubliant la structure vectorielle et en considérant l'ensemble des applications qui préservent juste cette distance, on sort des applications linéaires :les translations, par exemple, ne sont pas linéaires. La proposition 2.2.15 montre toutefois qu'on ne sort cependant pas du cadre affine canoniquement associée à la structure vectorielle.

Proposition 2.2.18.

- Pour tout $f \in MA(\mathcal{E})$, f est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(E)$ est une isométrie.
- Toute isométrie est bijective.

Démonstration. Si f est une isométrie, alors pour tout $\overrightarrow{xy} \in E$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\overrightarrow{xy}\|$. L'application $\overrightarrow{f}$ est donc une isométrie. Elle est notamment bijective et donc f aussi. □

Définition 2.2.19. On appelle $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Comme dans le cas vectoriel, les réflexions donnent un jeu de générateurs des isométries.

Proposition 2.2.20. Toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus $\dim(\mathcal{E}) + 1$ réflexions orthogonales.

Démonstration. Soit f une isométrie. Si f possède un point fixe x_0, alors $\overrightarrow{f} = \xi_{x_0} \circ f \circ \xi_{x_0}^{-1}$ est une isométrie vectorielle de E qui, d'après la proposition 2.2.7, s'écrit comme produit de $k \leq \dim(E) = \dim(\mathcal{E})$ réflexions orthogonales (vectorielles) $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_k$ par rapport aux hyperplans $H_1, \ldots, H_k \subset E$. Mais alors $r_i := \xi_{x_0}^{-1} \circ \tilde{r}_i \circ \xi_{x_0}$ est la réflexion orthogonale (affine) par rapport à $x_0 + H_i$ et on a

$$f = \xi_{x_0}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \xi_{x_0} = \xi_{x_0}^{-1} \circ \tilde{r}_1 \circ \cdots \circ \tilde{r}_k \circ \xi_{x_0} = \xi_{x_0}^{-1} \circ \tilde{r}_1 \circ \xi_{x_0} \circ \xi_{x_0}^{-1} \circ \tilde{r}_2 \circ \xi_{x_0} \circ \cdots \circ \xi_{x_0}^{-1} \circ \tilde{r}_k \circ \xi_{x_0} = r_1 \circ \cdots \circ r_k.$$

Si f n'a pas de point fixe, alors on considère n'importe quel $x_0 \in \mathcal{E}$ et on compose f avec$r$, la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}f(x_0)\right) + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{x_0 f(x_0)}\right)^{\perp}$. L'application $r \circ f$ est alors une isométrie qui fixe x_0. D'après le cas précédent, elle s'écrit donc comme produit d'au plus $\dim(\mathcal{E})$ réflexions orthogonales, et en composant à gauche par r, on obtient une écriture de f comme produit d'au plus $\dim(\mathcal{E})+1$ réflexions orthogonales.

□

Donnons maintenant un résultat fondamental de décomposition des isométries.

Théorème 2.2.21. Pour tout $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}, g) \in E \times \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ tel que

- g possède au moins un point fixe ;
- $t_{\overrightarrow{u}}$ et g commutent ;
- $f = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

On a alors $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre 1.

La démonstration de ce théorème va s'appuyer sur deux lemmes :

Lemme 2.2.22. Soit $\overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(E)$, $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})^{\perp} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$.

Démonstration. D'après le théorème du rang et le corollaire 2.1.12, les deux espaces ont la même dimension, il suffit donc de vérifier que l'on a une inclusion. Or pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$, on a $\overrightarrow{f}(x) = x$ et donc, pour tout $y \in E$,

$$\langle f(y) - y, x \rangle = \langle f(y), x \rangle - \langle y, x \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle - \langle y, x \rangle = 0.$$

□

Lemme 2.2.23. Soit $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ telle que $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) = E$, alors la conclusion du théorème s'applique avec $g \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$.

Démonstration. Supposons qu'un tel couple $(\overrightarrow{u}, g)$ existe et fixons $x_0 \in \mathrm{Fix}(g)$. On a alors $f(x_0) = x_0 + \overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)} \in \mathrm{Im}(\psi)$ où $\psi : \mathcal{E} \to E$ est définie par $\psi(x) = \overrightarrow{x f(x)}$. Notons que ψ est affine de linéarisé $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{Id}$ et donc que $\mathrm{Im}(\psi)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$. Par ailleurs, g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent donc $x_0 + \overrightarrow{u} = g(x_0 + \overrightarrow{u}) = x_0 + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = x_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$, donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$ et, en vertu des propositions 1.1.10 et 1.1.21, $\overrightarrow{u}$ est donc l'unique élément dans $\mathrm{Im}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$.

Rétrospectivement, on pose donc $\overrightarrow{u}$ l'unique élément dans $\mathrm{Im}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$ et $g = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}$. Comme $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$, les applications g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent bien. Il suffit donc de montrer que g admet un point fixe. Pour cela, on considère un antécédent $x_0 \in \mathcal{E}$ de $\overrightarrow{u}$ par ψ. On a alors $g(x_0) = f(x_0 - \overrightarrow{u}) = f(x_0) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(x_0) - \overrightarrow{u} = f(x_0) + \overrightarrow{f(x_0)x_0} = x_0$. □

Couplé avec le théorème 2.2.13, le théorème 2.2.21 est un outil puissant pour classifier les isométries.

Proposition 2.2.24. Si $n = 1$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{réflexion par rapport à un point}\}$.

Définition 2.2.25. Si $n = 2$, on appelle

- rotation autour de $a \in \mathcal{E}$ toute isométrie f définie par $f(a+u) = a + \overrightarrow{f}(u)$ avec $\overrightarrow{f}$ une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion.

Proposition 2.2.26. Si $n = 2$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{rotation}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\}$.

Définition 2.2.27. Si $n = 3$, on appelle

- rotation autour d'axe $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ toute toute isométrie f fixant $\mathcal{D}$ et telle que $\overrightarrow{f}_{|D^\perp}$ est une rotation vectorielle distincte de l'identité ;
- vissage toute composé d'une rotation avec une translation parallèle à l'axe de la rotation ;
- symétrie glissée toute réflexion composée avec une translation parallèle à l'axe de la réflexion ;
- anti-rotation toute composé d'une rotation avec une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Proposition 2.2.28. Si $n = 3$, on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{translations}\} \cup \{\text{vissage}\} \cup \{\text{symétrie glissée}\} \cup \{\text{anti-rotations}\}$.

2.3 Orientation

Proposition 2.3.1. Le groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes linéaires de E agit fidèlement et transitivement sur les bases de E. Autrement, pour tout couple $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de bases de E, il existe un unique $f \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $f(\mathcal{B})$ est une famille libre car f est injective et elle engendre E car f est surjective. Il s'agit donc bien d'une base.

Soit $\mathcal{B}_1 := (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 := (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E, alors l'application $f : E \to E$ définie par $f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ est bien l'unique élément de $\mathcal{GL}(E)$ envoyant $\mathcal{B}_1$ sur $\mathcal{B}_2$. $\square$

Définition 2.3.2. On définit la relation $\overset{o}{\sim}$ sur l'ensembles des bases de E par $\mathcal{B}_1 \overset{o}{\sim} \mathcal{B}_2$ si et seulement si il existe $f \in \mathrm{GL}(E)$ avec $\det(f) > 0$ telle que $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.

Proposition 2.3.3. La relation $\overset{o}{\sim}$ est une relation d'équivalence possédant exactement deux classes d'équivalences.

Définition 2.3.4. Une *orientation* sur E, c'est le choix d'une des deux classes d'équivalence pour la relation $\overset{o}{\sim}$. On appelle alors *bases directes* les éléments de cette classe et *bases indirectes* les éléments de l'autre classe.

Définition 2.3.5. Une orientation sur $\mathcal{E}$, c'est le choix d'une orientation pour E. On alors dit qu'un repère est *directe* si la base de E sous-jacente est directe.

Définition 2.3.6. On appelle *groupe spécial orthogonal de E* le groupe $\mathrm{SO}(E) := \mathrm{Ker}(\det_{|\mathrm{O}(E)})$.

Définition 2.3.7. On dit que $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est *positive* si $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}(E)$. On dit aussi que f est un *déplacement*. On note $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ le groupe des déplacements.

Remarque 2.3.8. Le fait qu'une isométrie soit un déplacement on non ne dépend pas du choix de l'orientation.

Proposition 2.3.9.

- Si $n = 1$, $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\}$;
- si $n = 2$, $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\} \cup \{\text{rotation}\}$;
- si $n = 3$, $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{\text{translation}\} \cup \{\text{vissage}\}$.

2.4 Angles

Dans toute cette section, on considérera que $\mathcal{E}$ est un plan affine d'espace directeur E.

On appellera rotation vetorielle tout élément de $\mathrm{SO}(E)$.

2.4.1 Angles orientés

Dans cette section, E n'est pas nécessairement orienté.

Lemme 2.4.1.

- Soit $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires. Il existe une unique rotation vectorielle ρ_{uv} telle que $\rho_{uv}(u) = v$.
- Soit $(u, v), (u', v') \in E^2$ deux couples de vecteurs unitaires. Il existe une rotation vectorielle ρ telle $\rho(u, v) = (u', v')$ si et seulement si $\rho_{uv} = \rho_{u'v'}$.

Définition 2.4.2. On définit la relation $\triangledown$ sur $\left\{(u, v) \in E^2 \,\middle|\, \|u\| = \|v\| = 1\right\}$ par $(u, v)\triangledown(u', v')$ si et seulement si il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u, v) = (u', v')$.

Proposition 2.4.3. La relation $\triangledown$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.4.4.

- On note $\mathcal{A}(E) := \left\{(u, v) \in E^2 \,\middle|\, \|u\| = \|v\| = 1\right\}/\!/\triangledown$ et on appelle *angles orientés dans E* ses éléments.
- Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on appelle angle orienté entre u et v, noté $\widehat{(u, v)}$, la classe d'équivalence de $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ par $\triangledown$.

Proposition 2.4.5. L'application

$$\begin{array}{ccc} \left\{(u, v) \in E^2 \,\middle|\, \|u\| = \|v\| = 1\right\} & \longrightarrow & \mathrm{SO}(E) \\ (u, v) & \longmapsto & \rho_{uv} \end{array}$$

induit une bijection de $\mathcal{A}(E)$ dans $\mathrm{SO}(E)$ qui induit une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}(E)$.

Proposition 2.4.6.

- Pour tout $u, v, w \in E \setminus \{0\}$, on a $\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)}$.
- Pour tout $u, v \in \setminus\{0\}$ et $f \in \mathrm{O}(E)$, on a $(\widehat{f(u), f}(v)) = \widehat{(u, v)}$ si $f \in \mathrm{SO}(E)$ et $(\widehat{f(u), f}(v)) = \widehat{(v, u)}$ sinon.

Définition 2.4.7. On définit la relation $\square$ sur $\mathcal{A}(E)$ par $\widehat{(u, v)}\square\widehat{(u', v')}$ si et seulement si $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')}$ ou $\widehat{(u, v)} = \widehat{(-u', v')}$.

Proposition 2.4.8. La relation $\square$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.4.9.

- On note $\mathcal{A}_D(E) := \mathcal{A}(E)/\!/\square$ et on appelle angles orientés de droites dans E ses éléments.
- On appelle angle orienté entre deux droites $D_1, D_2 \subset E$, noté $\widehat{(D_1, D_2)}$, la classe d'équivalence de $\widehat{(u_1, u_2)}$, où u_1 et u_2 sont respectivement des vecteurs directeurs de D_1 et D_2, par $\square$.
- On appelle angle orienté entre deux droites affines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$, noté $\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}$, l'angle orienté entre leurs espaces directeurs.

Proposition 2.4.10. L'isomorphisme $\mathcal{A}(E) \cong \mathrm{SO}(E)$ induit une bijection de $\mathcal{A}_D(E)$ dans $\mathrm{SO}(E)/\!/\pm\mathrm{Id}$ qui induit une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}_D(E)$.

2.4.2 Mesures d'angle

Dans cette section, on fixe une orientation pour E.

Proposition 2.4.11. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\!/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe.

Corollaire 2.4.12. Pour toute rotation vectorielle ρ, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/\!/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = R_\theta$ pour toute BOND $\mathcal{B}$.

Corollaire 2.4.13. L'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\!/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{SO}(E) \cong \mathcal{A}(E) \\ \theta & \longmapsto & \rho_\theta \end{array},$$

avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho_\theta) = R_\theta$ pour $\mathcal{B}$ n'importe quelle BOND, est un isomorphisme de groupe.

Définition 2.4.14.

- L'unique antécédent θ_ρ par ψ d'une rotation vectorielle ρ est appelée sa mesure d'angle.
- Pour toute rotation affine r, on définit la mesure d'angle de r comme étant la mesure d'angle de $\overrightarrow{r}$. Par convention, on définit de plus la mesure d'angle de l'identité comme étant 0.
- L'unique antécédent θ_{uv} par ψ d'un angle $\widehat{(u,v)}$ est appelée sa mesure.

Remarque 2.4.15. Le fait d'avoir choisi une orientation pour $\mathcal{E}$ permet d'associer à toute rotation un élément dans $]-\pi,\pi]$ et non plus dans $]0,\pi]$. En changeant l'orientation, on change le signe de toutes les mesures d'angle.

Définition 2.4.16. Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on définit θ_{uv} la mesure de l'angle $\widehat{(u,v)}$ comme la mesure d'angle de la rotation associée.

Proposition 2.4.17.

- Pour tout $u, v, w \in E \setminus \{0\}$, on a $\theta_{uv} + \theta_{vw} = \theta_{uw}$.
- Pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, on a $\theta_{(-u)v} = \theta_{uv} + \pi$.
- Pour tout $u, v \in \setminus\{0\}$ et $f \in O(E)$, on a $\theta_{f(u)f(v)} = \theta_{uv}$ si $f \in \mathrm{SO}(E)$ $\theta_{f(u)f(v)} = -\theta_{uv}$ sinon.

Proposition 2.4.18. Pour tout $u, v \in \setminus\{0\}$, $\langle u|v\rangle = \|u\|.\|v\| \cos(\theta_{uv})$.

Proposition 2.4.19. L'isomorphisme ψ induit un isomorphisme $\widetilde{\psi} : \mathbb{R}/\!/\pi\mathbb{Z} \to \mathcal{A}_D(E)$.

Définition 2.4.20. L'unique antécédent par $\widetilde{\psi}$ d'un angle de droites est appelée sa mesure.

2.4.3 Angles géométriques

Dans cette section, E n'est plus nécessairement orienté.

Définition 2.4.21.

- On appelle angle (resp. angle de droite) géométrique l'image quotient d'un angle orienté (resp. angle de droites) par la relation d'équivalence définie par $\widehat{(u,v)} \sim \widehat{(u',v')}$ si et seulement si $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$ ou $\widehat{(u,v)} = \widehat{(v',u')}$.

- On appelle angle (resp. angle de droite) géométrique entre deux vecteurs non nuls (resp. deux droites vectorielles ou affines) l'image de leur angle (resp. angle de droite) orienté dans l'ensemble des angles (resp. angles de droite) géométriques.

Remarques 2.4.22.

- On aurait pu définir les angles géométriques en remplaçant $\mathrm{SO}(E)$ par $\mathrm{O}(E)$ dans la construction des angles orientés.

- Les angles géométriques perdent la structure de groupes des angles orientés.

Définition 2.4.23.

- On définit la mesure d'un angle géométrique décrit par deux vecteurs $u, v \in E \setminus \{0\}$ par

$$\theta^g_{uv} := \arccos\left(\frac{\langle u|v\rangle}{||u||.||v||}\right) \in [0,\pi].$$

- On définit la mesure d'un angle de droites géométrique décrit par deux vecteurs $u, v \in E \setminus \{0\}$ par

$$\arccos\left(\frac{|\langle u|v\rangle|}{||u||.||v||}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proposition 2.4.24. Si E est orienté, alors, pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$, $\theta^g_{uv} = |\theta_{uv}|$.

2.4.4 Résumé

Les angles n'ont pas besoin du choix d'une orientation pour être défini, mais leurs mesures si.

	angles	angles de droites
orientés	$\widehat{(u,v)}$	$\widehat{(u,v)} = \widehat{(\pm u, \pm v)}$
	mesure$\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	mesure$\in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$
géométriques	$\widehat{(u,v)} = \widehat{(v,u)}$	$\widehat{(u,v)} = \widehat{(\pm v, \pm u)}$
	mesure$\in [0,\pi]$	mesure$\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$