

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
 10 novembre 2017

*Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
 Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
 Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
 L'épreuve dure deux heures.*

Exercice 1. (3 points) Donner les définitions :

1. d'une application affine ;
2. d'une dilatation ;
3. d'une base affine.

Exercice 2. (5 points)

1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace affine engendré par les points $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$. Donner une base de son espace directeur F .
2. Montrer que deux hyperplans affines distincts sont parallèles si et seulement si leur intersection est vide.
3. Soit t une translation et h une homothétie. Donner la nature géométrique des applications $h^{-1} \circ t \circ h$ et $t^{-1} \circ h \circ t$.

Exercice 3. (3,5 points) Soit $a, b \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & \lambda a + \mu b + (1 - \lambda - \mu)x \end{array}.$$

1. On suppose que $\lambda + \mu \neq 0, 1$. Montrer que f est une homothétie affine dont on précisera le centre et le rapport.
2. Que dire de f si $\lambda + \mu = 1$?
3. Que dire de f si $\lambda + \mu = 0$?

Exercice 4. (6 points) Soit $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathcal{E}$ six points distincts d'un espace affine tels que, pour $i \in \{1, 2\}$, a_i, b_i et c_i ne sont pas alignés, et $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) \parallel (b_2 c_2)$ et $(c_1 a_1) \parallel (c_2 a_2)$.

1. Montrer que les droites $(a_1 a_2)$ et $(b_1 b_2)$ sont ou parallèles, ou sécantes.
2. (a) On suppose que $(a_1 a_2) \cap (b_1 b_2) = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$, et on considère l'homothétie f de centre o qui envoie a_1 sur a_2 .
 - α . Montrer que, si $\overrightarrow{oa_2} = \lambda \overrightarrow{oa_1}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\overrightarrow{ob_2} = \lambda \overrightarrow{ob_1}$.
 - β . En déduire que $f(b_1) = b_2$.
 - γ . Montrer que $f(c_1) = c_2$.
 - δ En déduire que les droites $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ et $(c_1 c_2)$ sont concourantes.
- (b) On suppose que $(a_1 a_2) \parallel (b_1 b_2)$, montrer que $(a_1 a_2) \parallel (c_1 c_2) \parallel (b_1 b_2)$.
3. Quel est le nom du théorème démontré à la question 2.

TSVP $\Rightarrow$

Exercice 5. (4 points) Soit $f \in \text{GA}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

1. Déterminer f^2 .
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de f .
3. Déterminer la nature géométrique de f .
4. (a) Déterminer un repère dans lequel la matrice de f est diagonale.
(b) Selon sa nature géométrique, déterminer toutes les caractéristiques de f .

Exercice 6. (2 points) Soit a, b et c trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{P}$. On fixe $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$. Montrer que les centres de gravités des triangles abc et $a'b'c'$ coïncident si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $a' = \lambda b + (1 - \lambda)c$, $b' = \lambda c + (1 - \lambda)a$ et $c' = \lambda a + (1 - \lambda)b$.