Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel
corrigé

Dans tout ce corrigé, les espaces affines seront notés par majuscules cursives, et leur espaces directeurs par la même lettre en majuscule romane. On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ le corps sous-jacent à tous les espaces vectoriels.

Exercice 1.

1. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est dite affine si il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \to F$ telle que, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})$.

2. On dit qu'une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même est une dilatation si sa linéarisé est un multiple non nul de l'identité sur E.

3. On dit qu'un ensemble de $(k+1)$ points $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}$ d'un espace affine forme une base affine de $\mathcal{E}$ si $\mathrm{Aff}(\{x_0, \cdots, x_k\}) = \mathcal{E}$ et que $\dim(\mathcal{E}) = k$.

Exercice 2.

1. En notant respectivement a, b et c les points $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ et $(0,0,1,0)$, on a $\mathcal{F} = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$. Or $\overrightarrow{ab} = (-1,1,0,0)$ et $\overrightarrow{ac} = (-1,0,1,0)$ sont non colinéaires, on en déduit que $(-1,1,0,0)$ et $(-1,0,1,0)$ forment une base de F.

2. Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperplans distincts d'un espace affine $\mathbb{E}$.

   Supposons que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont parallèles. Alors $H_1 = H_2$ et, si il existait $x_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, on aurait $\mathcal{H}_1 = x_0 + H_1 = x_0 + H_2 = \mathcal{H}_2$ et cela contredirait l'hypothèse $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$. On en déduit donc que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont disjoints.

   Supposons maintenant que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ne sont pas parallèles. Alors $H_1 \neq H_2$ et il existe ou bien $\overrightarrow{u} \in H_1 \setminus H_2$ ou bien $\overrightarrow{u} \in H_2 \setminus H_1$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $\overrightarrow{u} \in H_1 \setminus H_2$; on a alors $H_1 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = H_1 \oplus \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ et donc $\dim\left(H_1 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})\right) = \dim(H_1) + \dim(\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})) = \dim(\mathcal{E}) - 1 + 1 = \dim(E)$ puisque H_1 est un hyperplan de $\mathcal{E}$. On en déduit que $E = H_1 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) \subset H_1 + H_2 \subset E$, et donc que $H_1 + H_2 = E$. Par un résultat du cours, cela implique que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$.

3. On fixe $\mathcal{E}$ un espace affine. Soit t et h une translation et une homothétie sur $\mathcal{E}$. On a alors $\overrightarrow{t} = \mathrm{Id}_E$ et $\overrightarrow{h} = \lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Par composition des linéarisés, on a $\overrightarrow{h^{-1} \circ t \circ h} = \frac{\lambda}{\lambda}\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$ et donc $h^{-1} \circ t \circ h$ est une translation. De même $\overrightarrow{t^{-1} \circ h \circ t} = \lambda \mathrm{Id}_E$. Si $\lambda \neq 1$, alors $\overrightarrow{h}$ n'admet que $\lambda \neq 1$ comme valeur propre, et donc $\overrightarrow{t^{-1} \circ h \circ t}$ admet un unique point fixe x_0. On a alors $(t^{-1} \circ h \circ t)(x_0 + \overrightarrow{u}) = x_0 + \lambda \overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et donc $t^{-1} \circ h \circ t$ est une homothétie. Si $\lambda = 1$, alors $h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et donc $(t^{-1} \circ h \circ t) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est aussi une homothétie.

   Au final $h^{-1} \circ t \circ h$ est une translation et $t^{-1} \circ h \circ t$ une homothétie.

Exercice 3.

1. Afin de montrer que f est une homothétie, commençons par montrer que, pour un $x_0 \in \mathcal{E}$ fixé, l'application

$$\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{f(x_0)f(x_0 + \overrightarrow{u})} \end{array}$$

n'est pas seulement linéaire, mais que c'est un multiple non nul de l'identité sur E. En effet, $f(x_0) = x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0a} + \mu\overrightarrow{x_0b} + (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{x_0x_0} = x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0a} + \mu\overrightarrow{x_0b}$ et $f(x_0+\overrightarrow{u}) = x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0a} + \mu\overrightarrow{x_0b} + (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{x_0(x_0+\overrightarrow{u})} = x_0+\lambda\overrightarrow{x_0a}+\mu\overrightarrow{x_0b}+(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{u}$. On en déduit que $\overrightarrow{f(x_0)f(x_0+\overrightarrow{u})} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{u}$ et donc que $\overrightarrow{f} = (1-\lambda-\mu)\mathrm{Id}_E$, avec $(1-\lambda-\mu) \neq 0$ puisque $\lambda+\mu \neq 1$. Mais par ailleurs, $1-\lambda-\mu \neq 1$ puisque $\lambda+\mu \neq 0$, et donc, par le même raisonnement que pour la question 3 de l'exercice 2, on en déduit que f est une homothétie de rapport $(1-\lambda-\mu)$.

Il ne reste plus qu'à déterminer son centre, c'est-à-dire son unique point fixe. Mais l'on sait que concaténer un système de points pondérés avec son barycentre conserve le barycentre, quelque soit le poids affecté à ce dernier point (tant que le barycentre reste bien défini). En notant $g := \mathrm{Bar}((a,\lambda),(b,\mu))$, lequel est bien défini car $\lambda+\mu \neq 0$, on obtient donc que $\lambda a + \mu b + (1-\lambda-\mu)g = g$ et donc que $f(g) = g$.

L'application f est donc l'homotthétie de centre $\mathrm{Bar}((a,\lambda),(b,\mu))$ et de rapport $1-\lambda-\mu$.

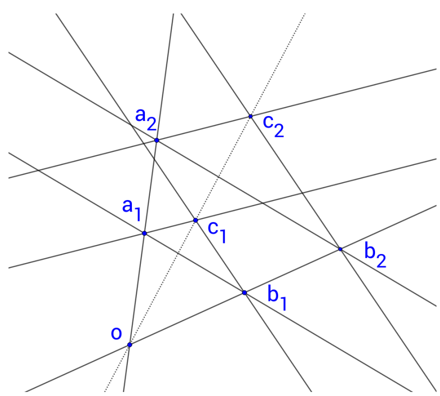
2. Si $\lambda+\mu = 1$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, $f(x) = \lambda a + \mu b$ et donc f est une application constante. Notamment, elle reste donc affine.

3. Si $\lambda+\mu = 0$, alors en fixant $x_0 \in \mathcal{E}$, on a pour tout $x \in \mathcal{E}$, $f(x) = x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0a} - \lambda\overrightarrow{x_0b} + \overrightarrow{x_0x} = x + \lambda\overrightarrow{x_0a} - \lambda\overrightarrow{x_0b}$. On en déduit que f est la translation par le vecteur $\lambda\overrightarrow{x_0a} - \lambda\overrightarrow{x_0b} = \lambda\overrightarrow{ba}$. Notamment, elle reste donc affine.

Exercice 4.

1. Supposons que les deux droites ne sont pas parallèles. On commence par remarquer que les quatre points a_1, a_2, b_1 et b_2 sont contenus dans un même plan $\mathcal{P} := \mathrm{Aff}(a_1,a_2,b_1)$ puisque $b_2 = a_2 + \overrightarrow{a_2b_2} = b_1 + \mu\overrightarrow{a_1b_1}$ avec $\mu \in \mathbb{K}$ d'après l'hypothèse $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$. De plus, $\mathcal{P}$ est bien un plan puisque son espace directeur contient les vecteurs $\overrightarrow{a_1a_2}$ et $\overrightarrow{b_1b_2}$ qui, puisque $(a_1a_2)\not/\!/(b_1b_2)$, ne sont pas colinéaires. Mais de fait, les doites (a_1a_2) et (b_1b_2) sont dirigés par des espaces D_1 et D_2 engendrés par des vecteurs non colinéaires. Le sous-espace vectoriel $D_a + D_b = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_a, \overrightarrow{u}_b) \subset P$ est donc de dimension deux et on a $D_a + D_b = P$. Les droites (a_1a_2) et (b_1b_2) sont donc deux droites contenues dans un plan $\mathcal{P}$ dont la somme des espaces directeurs vaut P, par un résultat du cours, les deux droites sont donc sécantes.

2. (a)



α. Puisque les droites (a_1a_2) et (b_1b_2) se coupent en un unique point o, elles ne sont pas parallèles et les vecteurs $\overrightarrow{oa_1}$ et $\overrightarrow{ob_1}$ ne sont donc colinéaires que si $o = a_1$ ou $o = b_1$. Mais les six points initiaux étant tous disjoints, on peut toutefois exclure ce dernier cas de figure, quitte à permuter les indices 1 et 2.

D'après l'hypothèse $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{a_2b_2} = \mu\overrightarrow{a_1b_1}$. Posons maintenant $\lambda' \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{ob_2} = \lambda'\overrightarrow{ob_1}$. On a alors $\lambda'\overrightarrow{ob_1} = \overrightarrow{ob_2} = \overrightarrow{oa_2} + \overrightarrow{a_2b_2} = \lambda\overrightarrow{oa_1} + \mu\overrightarrow{a_1b_1} = (\lambda-\mu)\overrightarrow{oa_1} + \mu\overrightarrow{ob_1}$. Par unicité de la décomposition comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{oa_1}$ et $\overrightarrow{ob_1}$, on a donc $\mu = \lambda'$ et $\lambda - \mu = 0$, c'est-à-dire $\lambda' = \mu = \lambda$.

β. Avec les notations de la question précédente, et puisqu'elle envoie a_1 sur a_2, f est l'homothétie de centre o et de rapport λ. Elle envoie donc b_1 et $o + \lambda\overrightarrow{ob_1} = b_2$.

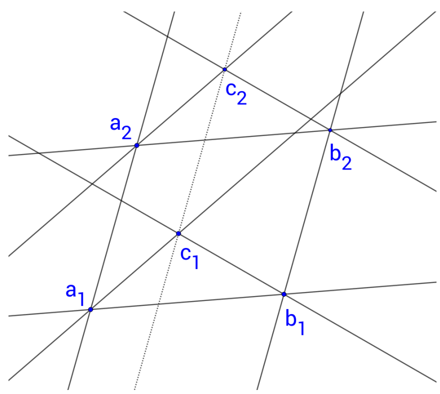
γ. Pour $i \in \{1, 2\}$, commençons par remarquer que, puisque les points a_i, b_i et c_i ne sont pas alignés, on a $c_i = (a_ic_i) \cap (b_ic_i)$. Par ailleurs, l'application f est une homothétie, sa linéarisé est donc un multiple de l'identité sur E, et elle envoie de fait toute droite sur une droite parallèle. Comme elle envoie de plus a_1 sur a_2 et b_1 sur b_2, on en déduit qu'elle envoie :

- (a_1c_1) sur l'unique droite parallèle (a_1c_1) passant par a_2, autrement dit sur (a_2c_2) ;
- (b_1c_1) sur l'unique droite parallèle (b_1c_1) passant par b_2, autrement dit sur (b_2c_2) ;
- l'intersection $c_1 = (a_1c_1) \cap (b_1c_1)$ sur l'intersection $c_2 = (a_2c_2) \cap (b_2c_2)$.

On a donc bien $f(c_1) = c_2$.

δ. Puisque $f(c_1) = c_2$, on a $\overrightarrow{oc_2} = \lambda\overrightarrow{oc_1}$ et les points o, c_1 et c_2 sont alignés. En particulier, $c \in (c_1c_2)$ et les doites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont donc concourantes car elles contiennent toutes le point o.

(b)



Puisque $(a_1a_2)/\!/(b_1b_2)$ et $(a_1b_1)/\!/(a_2b_2)$, le quadrilatère $a_1a_2b_2b_1$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{a_2b_2} = \overrightarrow{a_1b_1}$.Par ailleurs, puisque $(a_1c_1)/\!/(a_2c_2)$ et $(b_1c_1)/\!/(b_2c_2)$, il existe $\mu_a, \mu_b \in \mathbb{K}$ tels que $\overrightarrow{c_2a_2} = \mu_a\overrightarrow{c_1a_1}$ et $\overrightarrow{c_2b_2} = \mu_a\overrightarrow{c_1b_1}$. On a dès lors $\mu_b\overrightarrow{c_1b_1} - \mu_a\overrightarrow{c_1a_1} = \overrightarrow{c_2b_2} - \overrightarrow{c_2a_2} = \overrightarrow{a_2b_2} = \overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{c_1b_1} - \overrightarrow{c_1a_1}$. Or, les points a_1, b_1 et c_1 étant non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{c_1a_1}$ et $\overrightarrow{c_1b_1}$ sont non colinéaires et l'égalité ci-dessus implique que $\mu_a = \mu_b = 1$. On en déduit notamment que $\overrightarrow{c_2a_2} = \overrightarrow{c_1a_1}$ et donc que la quadrilatère $a_1c_1c_2a_2$ est un parallélogramme. Il s'ensuit que les droites (a_1a_2) et (c_1c_2) sont parallèles et, par transitivité, on a donc bien $(a_1a_2)/\!/(c_1c_2)/\!/(b_1b_2)$.

3. Il s'agit du théorème de Desargues.

Exercice 5.

1. Notons M la matrice de f. Un calcul direct montre que M^2, la matrice de de f^2 dans le repère canonique, est l'identité. On a donc $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

2. On résoud l'équation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix}. \iff \begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = x \\ -y + 2z - 2 = y \\ z = z \end{cases} \iff z = y + 1.$$

L'ensemble des points fixes est donc le plan d'équation cartésienne, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$, $z = y + 1$. Il contient notamment les points $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, -1, 0)$. On en déduit que $\mathrm{Fix}(f) = (0, 0, 1) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{(1, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 1, 1)})$.

3. D'après la question 1, f est une involution. Il s'agit donc d'une symétrie. D'après la question 2, c'est même une symétrie par rapport au plan $(0,0,1)+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{(1,0,0)},\overrightarrow{(0,1,1)})$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer la direction de cette symétrie.

4. (a) Il suffit de considérer un repère dont
   - l'origine est dans le plan fixé par f, par exemple $(0,0,1)$
   - les deux premiers vecteurs dirigent le plan fixé par f, par exemple $\overrightarrow{(1,0,0)}$ et $\overrightarrow{(0,1,1)}$;
   - le dernier vecteur correspond à la direction de la symétrie, c'est-à-dire un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre -1.

   Il ne reste donc plus qu'à résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \iff \begin{cases} x-2y+2z=-x \\ -y+2z=-y \\ z=-z \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

   Dans le repère $R' := ((0,0,1),\overrightarrow{(1,0,0)},\overrightarrow{(0,1,1)},\overrightarrow{(1,1,0)})$ la matrice de f est donc :

$$\mathrm{Mat}_{R'}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Cela peut se vérifier en calculant $P^{-1}MP$ avec

$$P := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   (b) D'après les questions précédentes, f est donc la symétrie par rapport au plan $(0,0,1)+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{(1,0,0)},\overrightarrow{(0,1,1)})$ selon la direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{(1,1,0)})$.

Exercice 6. On note g et g' les isobarycentres de, respectivement, a, b et c, et de a', b', c'.

Les points a, b et c sont non alignés, ils forment donc une base affine pour $\mathcal{P}$. Par hypothèse, il existe $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K}$ tels que les coordonnées barycentriques des différents points, dans le base affine (a,b,c) sont :

$$\begin{array}{cc} a:(1,0,0) & a':(0,\alpha,1-\alpha) \\ b:(0,1,1) & b'(1-\beta,0,\beta) \\ c:(0,0,1) & c':(\gamma,1-\gamma,0) \\ g:\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) & g':\left(\frac{1+\gamma-\beta}{3},\frac{1+\alpha-\gamma}{3},\frac{1+\beta-\alpha}{3}\right) \end{array},$$

la dernière ligne provenant du fait que les coordonnées barycentriques d'un barycentre sont les barycentres des coordonnées barycentriques des points de départ. On en déduit que $g=g'$ ssi $\gamma-\beta=\alpha-\gamma=\beta-\alpha=0$, c'est-à-dire ssi $\alpha=\beta=\gamma$. En posant λ cette valeur commune, on obtient bien le résultat demandé.