Université Aix-Marseille	2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen de rattrapage
21 juin 2018

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure trois heures.

Notation : Dans tout ce qui suit, les espaces affines seront notés par des majuscules cursives et leurs espaces directeurs par la même lettre en majuscale romane. Par exemple, si $\mathcal{E}$ est un espace affine, alors son espace directeur sera noté E. De plus, si $\mathcal{E}$ est euclidien, on notera $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ le produit scalaire sur E et, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $\overline{xy}$ la distance induite entre x et y.

On appellera *parallélogramme* tout quadrilatère dont les sommets ne sont pas alignés et dont les cotés opposés sont parallèles.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner :
   (a) la définition d'un sous-espace affine ;
   (b) le définition de la matrice d'une application affine $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ dans un repère donnée ;
   (c) la classification des isométries de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer :
   (a) qu'une application affine $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est injective si et seulement si il existe $y \in \mathcal{F}$ tel que $f^{-1}(y)$ soit un singleton ;
   (b) que les diagonales d'un parallélogramme sont sécantes en leur milieu ;
   (c) l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Exercice 2. (4 points) Soit $P := ((a_1, \lambda_1), \dots, (a_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. On considère la fonction $\varphi_P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_P(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{a_i x}^2$.

1. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, montrer qu'il existe $\overrightarrow{v}_0 \in E$ tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(y) = \varphi_P(x) + 2\langle \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{v}_0 \rangle$.
2. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$, montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(x) = \varphi_P(g) + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overline{xg}^2$ avec $g := \mathrm{Bar}(P)$.
3. Soit $a \neq b \in \mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathcal{E}$ tels que

$$\text{(a) } \overline{xa}^2 + \overline{xb}^2 = \overline{ab}^2 \,; \qquad \text{(b) } \overline{xa}^2 - \overline{xb}^2 = \overline{ab}^2.$$

Exercice 3. (5 points) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on définit l'application

$$f_{\alpha\beta} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x + \alpha y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \beta y - 1\right) \end{array}.$$

1. Déterminer les valeurs de α et β telles que $f_{\alpha\beta}$ soit une isométrie de déterminant positif et donner, dans ce cas, toutes les caractéristiques géométriques de $f_{\alpha\beta}$.
2. Déterminer les valeurs de α et β telles que $f_{\alpha\beta}$ soit une isométrie de déterminant négatif et donner, dans ce cas, toutes les caractéristiques géométriques de $f_{\alpha\beta}$.

Exercice 4. (7 points) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine sur un corps de caractéristique différente de 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *configuration de n points* tout n–uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{P}^n$ de points de $\mathcal{P}$; lorsque $n = 3$, on parle de *triangle*. On désigne par

- d l'application de décalage qui envoie $(a_1, \dots, a_n)$ sur $(a_2, \dots, a_n, a_1)$;
- m l'application de milieux qui envoie $(a_1, \dots, a_n)$ sur $(\mathrm{IsoBar}(a_1, a_2), \mathrm{IsoBar}(a_2, a_3), \dots, \mathrm{IsoBar}(a_{n-1}, a_n), \mathrm{IsoBar}(a_n, a_1))$, où IsoBar est l'application d'isobarycentre. Par ailleurs, toute application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ induit une application sur les configurations de n points définies par $f(a_1, \dots, a_n) := (f(a_1), \dots, f(a_n))$.

1. Soit P une configuration de $n \in \mathbb{N}^*$ points de $\mathcal{P}$ et $t : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une translation de $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que P et $m(P)$ ont le même barycentre.
   (b) Montrer que $t(m(P)) = m(t(P))$.
   (c) Déterminer l'isobarycentre de $m(t(P))$.
2. Soit T un triangle et g son isobarycentre.
   (a) Sur un dessin, representer T et $m(T)$.
   (b) Montrer que g est situé au deux tiers de chacune des médianes de T.
   (c) Montrer que $d(m(T))$ se déduit de T par une homothétie de centre g dont on déterminera le rapport.
3. Montrer que m est une bijection de l'ensemble des triangles sur lui-même.