Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen de rattrapage
corrigé

Exercice 1.

1. (a) Un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tel qu'il existe un point $x_0 \in \mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $\mathcal{F} = x_0 + F := \{x_0 + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}$.

   (b) La matrice de f dans le repère $(x_0, \overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & \mathrm{Mat}_{\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_n}(\overrightarrow{f}) & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   où $(a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées de $f(x_0)$, c'est-à-dire les seuls réels vérifiants $f(x_0) = x_0 + \sum a_i \overrightarrow{u}_i$.

   (c) Les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont les translations, les vissages, les symétries glissées et les anti-rotations.

2. (a) L'application f est injective ssi sa linéarisé $\overrightarrow{f}$ l'est, c'est-à-dire ssi $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{0}_F) = \{\overrightarrow{0}_E\}$. Or l'image réciproque par f d'un point $y \in \mathcal{F}$ est soit vide soit un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{0}_F)$, et un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est un singleton ssi son espace directeur est $\{\overrightarrow{0}_E\}$.

   (b) Soit $abcd$ un parallélogramme. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\overrightarrow{dc} = \lambda\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{bc} = \mu\overrightarrow{ad}$. Notamment, a, b et d ne sont pas alignés car sinon $c = d + \overrightarrow{dc} = c + \lambda\overrightarrow{ab}$ le serait aussi et $abcd$ ne serait pas un parallélogramme ; les vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ad}$ sont donc libres. Or

$$\overrightarrow{ab} + \mu\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ad} + \lambda\overrightarrow{ab};$$

   on en déduit que $\lambda = \mu = 1$. Mais alors, en notant m le milieu de b et d, on a $\overrightarrow{d}m = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ad} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ac}$ et donc m est aussi le milieu de a et c. Les diagonales de $abcd$ se coupent donc en leurs milieux.

   (c) Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \|\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} + t\overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u} \rangle + 2t\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle + t^2\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle.$$

   Le terme de droite est un polynôme en t de degré 2 qui reste donc positif, son discriminant est donc négatif ou nul, c'est-à-dire $4\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle^2 - 4\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u} \rangle\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle \leq 0$, et donc $\left|\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle\right| \leq \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_P(y) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \overrightarrow{a_i y} | \overrightarrow{a_i y} \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \overrightarrow{a_i x} + \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{a_i x} + \overrightarrow{xy} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \overrightarrow{a_i x} | \overrightarrow{a_i x} \rangle + 2\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \overrightarrow{a_i x} | \overrightarrow{xy} \rangle + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{xy} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{a_i x}^2 + 2\langle \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{v}_0 \rangle + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overline{xy}^2 = \varphi_P(x) + 2\langle \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{v}_0 \rangle
\end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{v}_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{a_i x}$, lequel ne dépend pas de x puisque

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{a_i x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\overrightarrow{a_i x'} + \overrightarrow{x' x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{a_i x'} + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \overrightarrow{x' x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{a_i x'}.$$

2. Par le même calcul, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_P(x) &= \varphi_P(g) + \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{g a_i} \,\middle|\, \overrightarrow{gx} \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \langle \overrightarrow{gx} | \overrightarrow{gx} \rangle \\ &= \varphi_P(g) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \overline{gx}^2. \end{aligned}$$

3. (a) Il s'agit de trouver les points x de $\mathcal{E}$ tels que $\varphi_P(x) = \overline{ab}^2$ avec $P := ((a, 1), (b, 1))$. D'après la question 2, cela revient à $2\overline{xm}^2 = \overline{ab}^2 - \varphi_P(m)$ avec m milieu de a et b, c'est-à-dire $\overline{xm}^2 = \frac{1}{2}(\overline{ab}^2 - \overline{am}^2 - \overline{bm}^2) = \frac{\overline{ab}^2}{4}$ ou encore $\overline{mx} = \frac{\overline{ab}}{2}$. Il s'agit donc du cercle de centre m et de rayon $\frac{\overline{ab}}{2}$, autrement dit l'unique cercle ayant $[a, b]$ comme diamètre.

   (b) Il s'agit de trouver les points x de $\mathcal{E}$ tels que $\varphi_P(x) = \overline{ab}^2$ avec $P := ((a, 1), (b, -1))$. D'après la question 1, cela revient à $2\langle \overrightarrow{xy} | \overrightarrow{v}_0 \rangle = \varphi_P(y) - \overline{ab}^2$ avec $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{ax} - \overrightarrow{bx} = \overrightarrow{ab}$ pour n'importe quel $y \in \mathcal{E}$. Notamment, pour $y = b$, cela donne $2\langle \overrightarrow{xb} | \overrightarrow{ab} \rangle = \overline{ab}^2 - \overline{ab}^2 = 0$. Il s'agit donc de la droite orthogonale à (ab) passant par b.

Exercice 3.

1. Dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de la linéarisé de $f_{\alpha\beta}$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \beta \end{pmatrix}.$$

   Pour que ce soit une isométrie, il faut que cette matrice soit orthogonale, ce qui donne :

   - $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, ce qui est bien vérifié ;
   - $\alpha^2 + \beta^2 = 1$;
   - $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2} = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\sqrt{3}\beta$.

   En combinant les deux dernières conditions, on en déduit que $3\beta^2 + \beta^2 = 1$ et donc que $\beta = \pm\frac{1}{2}$. La condition supplémentaire de déterminant positif donne $\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{-\sqrt{3}\sqrt{3}\beta}{2} = 2\beta > 0$. On en déduit que $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   La linéarisé de $f_{\alpha\beta}$ a donc comme matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

   qui est une matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, l'application $f_{\alpha\beta}$ est donc elle-même une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dont il ne reste plus qu'à déterminer le centre. Pour cela, on détermine l'unique point fixe ; cela donne

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y + 2 = 2x \\ \sqrt{3}x + y - 2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2\sqrt{3} - 2 \\ \sqrt{3}x = 2 + y \end{cases}.$$

   On en déduit que le centre de la rotation est $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

2. Par rapport à la question précédente, seule la condition de déterminant $2\beta < 0$ change. On obtient donc que la matrice de la linéarisé de $f_{\alpha\beta}$ est
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
D'après la classification des isométries de $\mathbb{R}^2$, le déterminant de $\overrightarrow{f}_{\alpha\beta}$ étant négatif, $f_{\alpha\beta}$ est une symétrie glissée. Elle s'écrit donc sous la forme $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}_0}$ où $s_{\mathcal{D}}$ est la symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et $t_{\overrightarrow{u}_0}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}_0$. Mais on sait par ailleurs que, s'il est non nul, $\overrightarrow{u}_0$ est un vecteur directeur pour $\mathcal{D}$, et que $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}_0} = t_{\overrightarrow{u}_0} \circ s_{\mathcal{D}}$. De cette dernière égalité, on en déduit que $f_{\alpha\beta}^2 = t_{\overrightarrow{u}_0} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}_0} = t_{\overrightarrow{u}_0} \circ t_{\overrightarrow{u}_0} = t_{2\overrightarrow{u}_0}$. Or un calcul direct donne
$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
On obtient donc $\overrightarrow{u}_0 = \overrightarrow{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}$.

Pour déterminer $\mathcal{D}$, il ne reste donc plus qu'à trouver un de ses points, c'est-à-dire, un des points fixes de $s_{\mathcal{D}} = t_{-\overrightarrow{u}_0} \circ f_{\alpha\beta}$. On pose donc le sytème
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 - \frac{3-\sqrt{3}}{4} = x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{4} = y \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}y + \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$
On peut donc prendre $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Au final, $f_{\alpha\beta}$ est la symétrie glissée d'axe $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \mathbb{R}.\overrightarrow{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}$ et de vecteur $\overrightarrow{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}$.

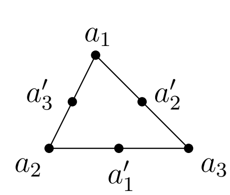
Exercice 4.

1. (a) Par associativité des barycentres, on a $\text{IsoBar}(m(P)) = \frac{1}{n}.\frac{1}{2}(a_n + a_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n}.\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i = \text{IsoBar}(P)$.

   (b) Il suffit de montrer que le milieu m de deux points $x, y \in \mathcal{P}$ translatés par un vecteur $\overrightarrow{u} \in P$ et égale au translaté par $\overrightarrow{u}$ du milieu de x et y. Or, pour tout $x_0 \in \mathcal{P}$, on a $m = x_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{x_0(x + \overrightarrow{u})} + \frac{1}{2}\overrightarrow{x_0(y + \overrightarrow{u})} = x_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{x_0x} + \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{x_0y} + \frac{1}{2}\overrightarrow{u} = \text{IsoBar}(x, y) + \overrightarrow{u}$.

   (c) D'après la question précédente, l'isobarycentre de $m(t(P))$ n'est autre que celui de $t(m(P))$; et d'après la question (a), il s'agit du barycentre de $t(P)$. D'après enfin un calcul similaire à celui de la question précédente, il s'agit donc de l'image par t de l'isobarycentre de P.

2. (a)



   Dans ce dessin, T correspond à la configuration (a_1, a_2, a_3) et $m(T)$ à la configuration (a'_3, a'_1, a'_2).

   (b) On note a_1, a_2, a_3 les sommets de T. Par associativité des barycentres, on a $g = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right)$. En notant a'_1 le milieu de a_2 et a_3, on a donc $\overrightarrow{0} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1g} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a'_1g} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1g} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a'_1a_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a_1g}$ et donc $\overrightarrow{a_1g} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a_1a'_1}$. Par symétrie, on a le même résultat sur les deux autres médianes.

(c) D'après la question précédente, et en notant a'_2 et a'_3 les milieux de, respectivement, a_1 et a_3, et a_1 et a_2, on a $\overrightarrow{ga'_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ga_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. on en déduit que $h(a_i) = a'_i$ où h est l'homothétie de centre g et de rapport $\frac{1}{2}$. Mais par définition $d(m(T)) = d(a'_3, a'_1, a'_2) = (a'_1, a'_2, a'_3)$.

3. Considérant un triangle T et montrons qu'il possède un unique antécédent T' par m. D'après la question 1.(a), T et T' auraient même barycentre g, et d'après la question 2.(c), T serait l'image de T' par l'homothétie h de centre g et de rapport $\frac{1}{2}$. Mais alors, T' est l'image de T par h^{-1}, l'homothétie de centre g et de rapport 2. Cela donne un unique candidat comme antécédent pour T, mais réciproquement, on a bien $m(T') = h(T') = T$.