Université Aix-Marseille	2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD2 : Barycentres, Repères & Paramétrisations

Dans tous les exercices qui suivent $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur E et, sauf mention contraire explicite, le corps de base est $\mathbb{R}$ (ou plus généralement un corps de caractéristique nulle).

Exercice 1. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Exercice 2.

1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.
2. Montrer que, dans un tétraèdre, les droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes.
3. (bonus) Qu'advient-il de ces résultats si $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps fini ?

Exercice 3. Soit $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $p := a + \alpha\overrightarrow{ab}$, $q := a + \alpha\overrightarrow{ad}$, $r := c + \alpha\overrightarrow{cb}$ et $s := c + \alpha\overrightarrow{cd}$. On note également f le milieu de a et c, et g le milieur de b et d.
Montrer que les droites (ps), (qr) et (fg) sont concourantes.

Exercice 4. Soit a, b, c une base affine d'un plan affine. Soit $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^2$ trois points et, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ les coordonnées barycentrique de m_i dans la base affine (a, b, c).
Montrer que les points m_1, m_2 et m_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5. Soit a, b, c trois points d'un plan affine et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ trois réels distincts de 1. On note $x_1 := \frac{1}{1-\alpha}b - \frac{\alpha}{1-\alpha}c$, $x_2 := \frac{1}{1-\beta}c - \frac{\beta}{1-\beta}a$, $x_3 := \frac{1}{1-\gamma}a - \frac{\gamma}{1-\gamma}b$, $y_1 := \frac{1}{1-\alpha}c - \frac{\alpha}{1-\alpha}b$, $y_2 := \frac{1}{1-\beta}a - \frac{\beta}{1-\beta}c$ et $y_3 := \frac{1}{1-\gamma}b - \frac{\gamma}{1-\gamma}a$.
Montrer que les points x_1, x_2 et x_3 sont alignés si et seulement si les points y_1, y_2 et y_3 sont alignés.

Exercice 6. Soit X et Y deux sous-ensembles convexes d'un espace affine réel. Montrer que $M(X, Y) := \{\text{milieu de } x \text{ et } y \mid x \in X, y \in Y\}$ est convexe.

Exercice 7. [Théorème de Carathéodory] On suppose dans cet exercice que $\mathcal{E}$ est réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On fixe $\Omega := \{x_1, \dots, x_\ell\} \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$, et on pose

$$C := \mathrm{Conv}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \Gamma := \bigcap_{\substack{P\subset\Omega \\ \mathrm{Card}(P)\leq n+1}} \mathrm{Conv}(P).$$

1. Montrer que $\Gamma \subset C$.
2. Montrer que si $\ell \leq n + 1$, alors $C = \Gamma$.
3. On suppose que $\ell > n + 1$.
   (a) En considérant les dimensions des sous-espaces affines de la suite $\left(\mathrm{Aff}(\{x_1, \dots, x_k\})\right)_{k\in\{1,\dots,\ell\}}$, montrer qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $x \in \mathrm{Aff}(\Omega \setminus \{x\})$.

Quitte à renuméroter, on suppose que $x = x_1$ et on note $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell} \lambda_i x_i$. On pose aussi $\lambda_1 = -1$. On fixe maintenant $x \in C$, que l'on note $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_i$ avec $\mu_i \geq 0$. On note enfin $i_0 \in \{1, \dots, \ell\}$ tel que $\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} = \inf\left\{\frac{\mu_i}{\lambda_i} \,\middle|\, \lambda_i > 0\right\}$.

(b) Justifier l'existence de i_0.

(c) Montrer que $x_{i_0} = \sum_{i\in\{1,\dots,\ell\}\setminus\{i_0\}} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$ et que $x = \sum_{i\in\{1,\dots,\ell\}\setminus\{i_0\}} \left(\mu_i - \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}\lambda_i\right) x_i$.

(d) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $\mu_i - \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}\lambda_i \geq 0$.

4. Montrer par récurrence que $C = \Gamma$, c'est-à-dire que tout point de $\mathrm{Conv}(\Omega)$ s'écrit comme barycentre d'au plus $n + 1$ points de Ω.

5. Montrer que le théorème reste vrai si Ω est infini.

Exercice 8. On suppose dans cet exercice que $\mathcal{E}$ est de dimension finie et on note $n := \dim(\mathcal{E})$. Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-espace affine possède une représentation cartésienne.

1. Montrer que, pour tout hyperplan affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, il existe une forme affine $\phi_{\mathcal{F}}$ telle que $\phi_{\mathcal{F}}^{-1}(0) = \mathcal{F}$.

2. Montrer que tout sous-espace affine de dimension p peut être réalisé comme intersection de $n-p$ hyperplans.

3. En déduire que tout sous-espace affine possède une représentation cartésienne.

Exercice 9. On considère un plan affine réel $\mathcal{E}$ muni d'un repère R.

1. Soit $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ les points ayant, respectivement, comme coordonnées, dans R, $(-1, -2)$, $(1, -1)$, $(2, -3)$ et $(4, -2)$. Existe-t-il une application affine envoyant a sur $(0, 0)$, b sur $(1, 0)$, c sur $(0, 1)$ et d sur $(1, 1)$.

2. Même question avec $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de a, b, c et d pour qu'une telle application affine existe.

Exercice 10. On considère un plan affine muni d'un repère $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Montrer que toute droite a une paramétrisation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

2. Montrer que les droites de paramétrisations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sont parallèles si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Montrer que les droites de paramétrisations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 11. On considère un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $R := (o, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. Ecrire la matrice de la translation par le vecteur $\vec{u}_0 = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \in E$.
2. Soit $x_0 \in \mathcal{E}$ le point de coordonnée (α, β, γ) dans le repère R. Ecrire la matrice de l'homothétie de centre $x_0 \in \mathcal{E}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 12. Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{E}$. On considère $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine telle que $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$.

1. (a) Déterminer f^3.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe que l'on déterminera.
2. (a) Ecrire la matrice M de f dans le repère $(a, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.
   (b) A l'aide de M, retrouver l'unique point fixe de f.

Exercice 13. Soit $\mathcal{E}$ le plan affine réel muni d'un repère R. On considère l'application affine $f \in \mathrm{MA}(\mathcal{E})$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{R,R}(f) := \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. Déterminer les valeurs propres de $\vec{f}$.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
3. Parmi les différents types d'applications affines vues en cours, déterminer la nature de f en précisant les paramètres associés.