Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD3 : Quelques théorèmes importants de géométrie

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie.

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine.
   (a) Pour tous $a, b \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} \in D \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, on note $\lambda^{\overrightarrow{u}}_{a,b} \in \mathbb{K}$ l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{ab} = \lambda^{\overrightarrow{u}}_{a,b}.\overrightarrow{u}$. Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathcal{D}$ tels que $a \neq b$ ou $c \neq d$, la quantité $\frac{ab}{cd} := \frac{\lambda^{\overrightarrow{u}}_{a,b}}{\lambda^{\overrightarrow{u}}_{c,d}} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ ne dépend pas de $\overrightarrow{u}$.
   (b) Montrer que si $g = \alpha a + (1-\alpha)b$ avec $a, b \in \mathcal{D}$ distincts et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $g \in \mathcal{D}$ et $\frac{ga}{gb} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}$.
2. (a) Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3 \subset \mathcal{E}$ trois hyperplans parallèles d'espace directeur commun H tels que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient distincts. Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites telles que $D_a, D_b \not\subset H$.
      α. Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_a$ et $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_b$ sont des singletons, dont on notera respectivement a_i et b_i l'unique élément.
      β. Montrer que $\frac{a_1a_3}{a_1a_2} = \frac{b_1b_3}{b_1b_2}$.
   (b) **Théorème de Thalès**
   Soit $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point o. Montrer que, pour tous points $a_1, a_2 \in \mathcal{D}_a \setminus \{o\}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{D}_b \setminus \{o\}$, on a $(a_1b_1) /\!/ (a_2b_2)$ si et seulement si $\frac{oa_2}{oa_1} = \frac{ob_2}{ob_1}$.
3. (a) Montrer que si $g = \alpha a + \beta b + (1-\alpha-\beta)c$ avec $a, b, c \in \mathcal{D}$ non alignés et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors les droites (ab) et (cg) se rencontrent ssi $\alpha + \beta \neq 0$ et le point d'intersection est alors $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b$, c'est-à-dire l'unique point $d \in (ab)$ vérifiant $\frac{da}{db} = -\frac{\beta}{\alpha}$.
   (b) **Théorème de Ceva**
   Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.
      i. On suppose que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont parallèles. A l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$.
      ii. On suppose que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes en un point $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
         α. Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$.
         β. Montrer que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$.
      iii. On suppose que $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = -1$ et que les droites (aa'), (bb') et (cc') ne sont pas parallèles. Quitte à permuter les points, on suppose que (aa') et (bb') sont sécantes en $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
         α. Montrer que $\frac{a'b}{a'c} = -\frac{\gamma}{\beta}$ et que $\frac{b'c}{b'a} = -\frac{\alpha}{\gamma}$.
         β. En déduire que $\frac{c'b}{c'a} = -\frac{\alpha}{\beta}$ puis que (cc') passe par m.
4. **Théorème de Ménélaüs**
   Soit $a, b, c \in \mathcal{E}$ non alignés et $a' \in (bc)$, $b' \in (ca)$ et $c' \in (ab)$.
   (a) Ecrire les coordonnées barycentriques de a', b', c' dans la base affine a, b, c.
   (b) Montrer que les points a', b' et c' sont alignés si et seulement si $\frac{a'b}{a'c} \cdot \frac{b'c}{b'a} \cdot \frac{c'a}{c'b} = 1$.

Exercice 2. Théorème de Desargues

1. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(a_1b_1) /\!/ (a_2b_2)$, $(b_1c_1) /\!/ (b_2c_2)$ et $(c_1a_1) /\!/ (c_2a_2)$.
   (a) Montrer que les droites (a_1a_2) et (b_1b_2) sont ou parallèles, ou sécantes.

(b) i. On suppose que $(a_1a_2) \cap (b_1b_2) = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$, et on considère l'homothétie f de centre o qui envoie a_1 sur a_2.

α. Montrer que $f(b_1) = b_2$.

β. Montrer que $f(c_1) = c_2$.

γ. En déduire que les droites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont concourantes.

ii. On suppose que $(a_1a_2) /\!/ (b_1b_2)$, montrer que $(a_1a_2) /\!/ (c_1c_2) /\!/ (b_1b_2)$.

2. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ deux triangles tels que $(b_1c_1) \cap (b_2c_2) = \{\alpha\}$, $(c_1a_1) \cap (c_2a_2) = \{\beta\}$ et $(a_1b_1) \cap (a_2b_2) = \{\gamma\}$. A l'aide du théorème de Ceva, montrer que les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites (a_1a_2), (b_1b_2) et (c_1c_2) sont parallèles ou concourantes.

Exercice 3. Théorème de Pappus

1. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites d'un plan affine $\mathcal{E}$. On se donne $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ tels que $(a_1b_2) /\!/ (a_2b_1)$ et $(b_1c_2) /\!/ (b_2c_1)$.

   (a) On suppose $\mathcal{D}_1 /\!/ \mathcal{D}_2$. Montrer que $(a_1c_2) /\!/ (a_2c_1)$.

   (b) On suppose $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$.

   i. Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{o\}$ avec $o \in \mathcal{E}$.

   ii. Montrer que $(a_1c_2) /\!/ (a_2c_1)$.

2. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$ deux droites non parallèles qui s'intersectent en un point $o \in \mathcal{E}$. Soit $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{D}_1$ et $a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{D}_2$ tels que $(b_1c_2) \cap (b_2, c_1) = \{\alpha\}$, $(c_1a_2) \cap (c_2, a_1) = \{\beta\}$ et $(a_1b_2) \cap (a_2, b_1) = \{\gamma\}$.
   A l'aide du théorème de Ménélaüs, montrer que les points α, β et γ sont alignés.