

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD4 : UNE CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS AFFINES RÉELLES

Exercice 1. Automorphismes réels

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un automorphisme de corps, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que

- $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, puis pour tout $x \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. En déduire que φ est croissante, puis que φ est continue.
4. En déduire que $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
5. Donner un exemple d'automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui ne soit pas l'identité.

Exercice 2. Caractérisation des applications affines réelles

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels de même dimension finie $n \geq 2$. On considère $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ bijective préservant l'alignement des points. On veut montrer que f est affine.

1. (a) Montrer qu'un sous-ensemble d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement si il contient entièrement toute droite passant par deux de ses points. En déduire que pour tout sous-espace affine $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine.
- (b) Montrer que f envoie une base affine de $\mathcal{E}$ sur une base affine de $\mathcal{F}$. En déduire que les images par f de points affinement libres sont affinement libres.
- (c) Montrer que f envoie tout sous-espace de dimension $k \in \mathbb{N}$ de $\mathcal{E}$ sur un sous-espace de dimension k de $\mathcal{F}$.
- (d) Montrer que deux droites sécantes en un point sont envoyées par f sur deux droites sécantes en un point et que ce point d'intersection est l'image par f de l'intersection des deux droites de départ.
- (e) Montrer que f envoie deux droites parallèles sur deux droites parallèles.
2. On fixe maintenant $o \in \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite affine contenant o , $a \in \mathcal{D} \setminus \{o\}$ et $b \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$.
 - (a) On pose $c = o + \vec{o\vec{a}} + \vec{o\vec{b}}$. Montrer que $\{c\} = (a + \mathbb{R} \cdot \vec{o\vec{b}}) \cap (b + \mathbb{R} \cdot \vec{o\vec{a}})$. En déduire que $f(c) = f(o) + \overrightarrow{f(o)f(a)} + \overrightarrow{f(o)f(b)}$.
 - (b) Justifier l'existence d'une unique application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(o + \lambda \vec{o\vec{a}}) = f(o) + \varphi(\lambda) \overrightarrow{f(o)f(a)}$.
 - (c) Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. On note $m = o + \lambda \vec{o\vec{a}}$ et $m' = o + \lambda' \vec{o\vec{a}}$.
 - i. Justifier l'existence de $p \in \mathcal{E}$ tel que $(b + \mathbb{R} \cdot \vec{o\vec{a}}) \cap (m + \mathbb{R} \cdot \vec{o\vec{b}}) = \{p\}$ puis de $q \in \mathcal{D}$ tel que $(p + \mathbb{R} \cdot \vec{bm'}) \cap \mathcal{D} = \{q\}$. Montrer alors que $q = o + (\lambda + \lambda') \vec{o\vec{a}}$.
 - ii. Justifier l'existence de $r \in (o + \mathbb{R} \cdot \vec{o\vec{b}})$ tel que $(mr) \parallel (ab)$ puis de $s \in \mathcal{D}$ tel que $(bm') \parallel (rs)$. Montrer alors que $s = o + \lambda \cdot \lambda' \vec{o\vec{a}}$.
 - iii. En déduire que $\varphi(\lambda + \lambda') = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda')$ et $\varphi(\lambda \cdot \lambda') = \varphi(\lambda) \cdot \varphi(\lambda')$.

(d) Dédurre de ce qui précède que $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ et donc que $f(o + \lambda \overrightarrow{oa}) = f(o) + \overrightarrow{\lambda f(o)f(a)}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que f est affine.

4. Montrer par trois contre-exemples que les conditions “ f bijective”, “ $n \geq 2$ ” et “ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ” sont chacune nécessaires.