Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

TD5 : Espaces euclidiens

Notations
Dans tout ce qui suit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, etc) est un espace affine euclidien de dimension n d'espace directeur E (resp. F, G, etc) muni du produit scalaire $((u,v) \mapsto \langle u|v\rangle)$. On note alors $d(x,y)$ ou $\overline{xy}$ la distance induite entre deux points $x, y \in \mathcal{E}$.

Pour tout point $o \in \mathcal{E}$ et tout réel positif $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle sphère de centre o et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathcal{E} | d(x,o) = r\}$. Dans le cas $n = 2$, une sphère est appelée cercle.

Pour tous points $a, b \in \mathcal{E}$, on appelle hyperplan médiateur de a et b l'ensemble $\mathrm{med}(a,b) := \{x \in \mathcal{E} | d(x,a) = d(x,b)\}$. Dans le cas $n = 2$, un hyperplan médiateur est appelé médiatrice.

Exercice 1. Montrer que, sur un espace vectoriel euclidien, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(u,v) = ||u - v||$ pour tout $u, v \in E$ est une distance.

Exercice 2. Montrer que, pour tous $x, y, z \in \mathcal{E}$, $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ si et seulement si $y \in \mathrm{Conv}(\{x,z\})$.

Exercice 3.

1. Montrer le théorème d'Al-Kashi, c'est-à-dire que pour tout $a, b, c \in \mathcal{E}$, on a
$$\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + 2\langle \overrightarrow{ab} | \overrightarrow{ac} \rangle.$$
2. Montrer le théorème de Pyhtagore, c'est-à-dire qu'un triangle abc de $\mathcal{E}$ est rectangle en a si et seulement si $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2$.

Exercice 4. Pour tous $a, b \in \mathcal{E}$, montrer que $\mathrm{med}(a,b) = m + \left(\mathbb{R}.\overrightarrow{ab}\right)^\perp$ où m est le milieu de a et b. Déterminer sa dimension.

Exercice 5. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+^{n+1}$ définie par $\varphi(x) = (\overline{a_0x}, \ldots, \overline{a_nx})$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ est injective. Est-elle surjective ?

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Montrer que, pour tous sous-espace vectoriel $F, G \subset E$:
   (a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
   (b) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
   (c) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{E}$ une base affine de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $\dim\left(\bigcap_{k \in [\![1,p]\!]} \mathrm{med}(a_0, a_k)\right) = n - p$.
2. En déduire qu'il existe une unique sphère passant par tous les points $a_0, \ldots, a_n$.
3. Montrer que $\bigcap_{k \neq l \in [\![0,n]\!]} \mathrm{med}(a_k, a_l)$ est un singleton.

Exercice 8. Soit $P := ((a_1, \lambda_1), \ldots, (a_k, \lambda_k))$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}$. On considère la fonction φ_P : $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_P(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{a_i x}^2$.

1. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, montrer qu'il existe $v_0 \in E$ tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(y) = \varphi_P(x) + 2\langle \overrightarrow{xy} | v_0 \rangle$.
2. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$, montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\varphi_P(x) = \varphi_P(g) + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overline{xg}^2$ avec $g := \mathrm{Bar}(P)$.
3. Soit $a, b \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de α, l'ensemble des points $x \in \mathbb{E}$ tels que

$$\text{(a) } \overline{xa}^2 + \overline{xb}^2 = k \qquad \text{(b) } \overline{xa}^2 - \overline{xb}^2 = k \qquad \text{(c) } \frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} = k$$

Exercice 9. Soit $\mathcal{F} \subset$ un sous-espace affine.

1. (a) Pour tout $x \in \mathcal{E}$, montrer qu'il existe un unique $p_{\mathcal{F}}(x) \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{xp_{\mathcal{F}}(x)} \in F^{\perp}$.
   (b) Montrer que l'application $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine.
2. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on définit $d(x, \mathcal{F}) := \min_{y \in \mathcal{F}} d(x, y)$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $d(x, \mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{F}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $d(x, \mathcal{F}) = d(x, p_{\mathcal{F}}(x))$.
   (c) Réciproquement, montrer que si, pour $y \in \mathcal{F}$, $d(x, y) = d(x, \mathcal{F})$, alors $y = p_{\mathcal{F}}(x)$.

Exercice 10. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont perpendiculaires si $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont orthogonaux.

1. Montrer que deux sous-espaces affines perpendiculaires ont une intersection non vide.
2. On suppose dans cette question que E est un plan affine. Montrer que deux droites de E sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales.
3. On suppose dans cette question que E est un espace affine de dimension 3.
   (a) Montrer que deux plans de E sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite une droite orthogonale à l'autre.
   (b) Montrer que si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
   (c) Montrer que si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
   (d) Montrer que deux plans ne sont jamais orthogonaux.