Université Aix-Marseille 2017–2018

L3 – Parcours MG
Géométrie affine et euclidienne

Examen terminal
12 janvier 2018

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure trois heures.

Notation : Dans tout ce qui suit, les espaces affines seront notés par des majuscules cursives et leurs espaces directeurs par la même lettre en majuscale romane. Par exemple, si $\mathcal{E}$ est un espace affine, alors son espace directeur sera noté E.

Exercice 1. (6 points)

1. Donner les définitions :
   (a) d'un sous-ensemble convexe d'un espace affine réel ;
   (b) d'un repère orthonormé pour un espace affine euclidien ;
   (c) d'une réflexion orthogonale dans un espace affine euclidien.

2. Montrer que :
   (a) l'application suivante induit une structure affine sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a, b & \longmapsto & \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{array}.$$

   (b) si $\mathcal{E}$ est un espace affine et $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sont deux sous-espaces affines tels que $F + G = E$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$;
   (c) si f est une isométrie d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dans lui-même, alors $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)^\perp = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2. (5 points) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Montrer que les translations et les homothéties envoient toute droite sur une droite parallèle.

2. Soit $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathcal{E}$ deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{a_2 b_2} = \lambda \overrightarrow{a_1 b_1}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (a) Montrer que si $\lambda = 1$ alors il existe un unique translation envoyant a_1 sur a_2 et b_1 sur b_2.
   (b) Montrer que si $\lambda \neq 1$ alors il existe un unique homothétie envoyant a_1 sur a_2 et b_1 sur b_2.

3. Soit $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{E}$ tels que les triangles $T_1 := a_1 b_1 c_1$ et $T_2 := a_2 b_2 c_2$ soient non aplatis. Montrer que les cotés de T_1 et T_2 sont deux à deux parallèles si et seulement si il existe une translation ou une homothétie envoyant T_1 sur T_2.

Exercice 3. (4 points) Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien muni d'une base affine (a, b, c).

1. Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ et m le milieu de x_1 et x_2.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{P}$, $\langle \overrightarrow{xm}, \overrightarrow{xm} \rangle = \frac{1}{4} \langle \overrightarrow{x_1 x_2}, \overrightarrow{x_1 x_2} \rangle + \langle \overrightarrow{x x_1}, \overrightarrow{x x_2} \rangle$.

(b) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathcal{P} \mid \langle \overrightarrow{xx_1}, \overrightarrow{xx_2} \rangle = 0\}$ correspond au cercle de centre m et de rayon $\frac{1}{2}d(x_1x_2)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On cherche dans cet question à déterminer l'ensemble $C_\lambda := \{x \in \mathcal{P} \mid d(x,a) = \lambda d(x,b)\}$.

   (a) Montrer que $C_\lambda \cap (ab)$ contient deux points c_1 et c_2 dont on déterminera les coefficients barycentriques dans la base affine (a,b,c).

   (b) Pour tout $x \in \mathcal{P}$, exprimer $\overrightarrow{xc_1}$, $\overrightarrow{xc_2}$ puis $\langle \overrightarrow{xc_1}, \overrightarrow{xc_2} \rangle$ en fonction de $\overrightarrow{xa}$, $\overrightarrow{xb}$ et λ.

   (c) En déduire une description géométrique de C_λ.

Exercice 4. (8 points) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine muni d'une base affine (o,a,b).

1. Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{P}$ trois points de coordonnées barycentriques respectifs (o_1,α_1,β_1), (o_2,α_2,β_2) et (o_3,α_3,β_3). Montrer que les points x_1, x_2 et x_3 sont alignés si et seulement si le déterminant suivant s'annule :

$$\begin{vmatrix} o_1 & o_2 & o_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $a' \neq a'' \in (oa) \setminus \{o,a\}$ et $b' \neq b'' \in (ob) \setminus \{o,b\}$ tels que les intersections $(a'b'') \cap (a''b')$, $(ab'') \cap (a''b)$ et $(ab') \cap (a'b)$ sont toutes réduites à un point que l'on notera, respectivements, c, c' et c''.

   (a) Montrer qu'il existe $\lambda', \lambda'', \mu', \mu'' \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tels que les coordonnées barycentriques de a, a', a'', b, b' et b'' soient respectivement

$$(0,1,0) \quad (1-\lambda',\lambda',0) \quad (1-\lambda'',\lambda'',0) \quad (0,0,1) \quad (1-\mu',0,\mu') \quad (1-\mu'',0,\mu'').$$

   (b) Montrer que les coordonnées barycentriques de c sont

$$\left(\frac{\lambda'(1-\lambda'')(\mu''-\mu') + \mu''(1-\mu')(\lambda''-\lambda')}{\lambda''\mu''-\lambda'\mu'}, \frac{\lambda'\lambda''(\mu''-\mu')}{\lambda''\mu''-\lambda'\mu'}, \frac{\mu'\mu''(\lambda''-\lambda')}{\lambda''\mu''-\lambda'\mu'} \right).$$

   (c) Donner les coordonnées barycentriques de c' et c''.

   (d) Montrer que c, c' et c'' sont alignés.

   (e) Nommer le théorème que l'on vient de démontrer.

Exercice 5. (3 points) On considère l'application affine

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{2x+\sqrt{6}(y+z)}{4} - 1 \,,\, \frac{3z-y-\sqrt{6}x}{4} \,,\, \frac{3y-z-\sqrt{6}x+1}{4} \right) \end{array}.$$

1. Donner la matrice de f dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que f est une isométrie.

3. Déterminer la nature géométrique de f.