Université Aix-Marseille 2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

DM : groupes monogènes

On dit qu'un groupe G est *monogène* si il existe $g_0 \in G$ tel que $\langle g_0 \rangle = G$; on dit alors que g_0 est un *générateur* de G. Si, de plus, G est fini, on dit que G est *cyclique*.

1. (a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est monogène.
   (b) Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique.
   (c) Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$ forme un groupe cyclique pour la multiplication.
   (d) Soit G_1 et G_2 deux groupes cycliques avec $\operatorname{pgcd}(|G_1|, |G_2|) = 1$. Montrer que le produit direct $G_1 \times G_2$ est cyclique.
2. Soit G un groupe monogène engendré par $g_0 \in G$.
   (a) i. Montrer que $G = \{g_0^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
       ii. Montrer que $|G| = |g_0|$.
       iii. Montrer que G est abélien.
       iv. A. Si G n'est pas cyclique, montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
           B. Si G est cyclique, montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n = |G|$.
   (b) Soit $H \subset G$ un sous-groupe. On note $d := \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid g_0^k \in H\}$.
       i. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $g_0^k \in H$ alors d divise k.
       ii. En déduire que H est monogène.
       iii. Montrer que H est cyclique si et seulement G l'est.
   (c) i. Si G est non cyclique, montrer que g_0 et g_0^{-1} sont les seuls générateurs ; autrement dit, montrer que si $G = \langle g \rangle$ avec $g \in G$, alors $g \in \{g_0, g_0^{-1}\}$.
       ii. On suppose dans cette question que G est cyclique non réduit à l'élément neutre.
           A. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que g_0^k soit générateur de G. A l'aide du corollaire de Bachet–Bézout, montrer que k est premier avec $|G|$.
           B. Montrer qu'un élément de G est un générateur de G si et seulement si il s'écrit sous la forme g_0^k avec $k \in [\![1, |G| - 1]\!]$ premier avec $|G|$.
   (d) Soit H un groupe et $f : G \to H$ un morphisme de groupes.
       i. Montrer que f est entièrement déterminé par $f(g_0)$.
       ii. En déduire que si f est un épimorphisme, alors H est monogène.
3. Soit G un groupe, pas forcément monogène. Soit $H \subset Z(G) \subset G$ un sous-groupe contenu dans le centre G, c'est-à-dire tel que tous ses éléments commutent avec tous les éléments de G.
   (a) Montrer que H est distingué dans G.
   (b) On suppose que G/H est cyclique, montrer que G est abélien.