**Licence – Mathématiques
Algèbre 2****INTERROGATION 1
CORRIGÉ****SUJET A****Question 1**

On appelle division euclidienne de $n_1 \in \mathbb{Z}$ par $n_2 \in \mathbb{Z}^*$ la donnée des uniques quotient $q \in \mathbb{Z}$ et reste $r \in \llbracket 0, |n_2| - 1 \rrbracket$ tels que $n_1 = q.n_2 + r$.

Question 2

Soit $c \in \mathbb{Z}$ un multiple commun à a_1 et a_2 . Par division euclidienne, on a $c = q.\text{ppcm}(a_1, a_2) + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \llbracket 0, \text{ppcm}(a_1, a_2) - 1 \rrbracket$. Par hypothèse, on a $a_1, a_2 \mid c$ et, par définition, $a_1, a_2 \mid \text{ppcm}(a_1, a_2)$; on en déduit que $a_1, a_2 \mid r = c - q.\text{ppcm}(a_1, a_2)$. Or $r \in \llbracket 0, \text{ppcm}(a_1, a_2) - 1 \rrbracket$ qui, par minimalité de $\text{ppcm}(a_1, a_2)$, ne contient que 0 comme multiple commun de a_1 et a_2 . On en déduit que $r = 0$ et donc que c est un multiple de $\text{ppcm}(a_1, a_2)$.

Question 3

On a $14^n = (13 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 13^k = 13^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 13^k = 1 + 13 \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 13^{k-1}$. On en déduit que le reste de la division euclidienne de 14^n par 13 vaut 1.

SUJET B**Question 1**

Deux entiers sont premiers entre eux si et seulement si leur plus grand diviseur commun vaut 1.

Question 2

Montrons, par récurrence sur l'entier en question, que tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ est divisible par un nombre premier. Le résultat est vrai pour $n = 2$ car 2 est divisible par $2 \in \mathcal{P}$. Supposons maintenant le résultat vrai pour tout entier entre 2 et n . Si $n + 1$ est premier et il est alors divisible par $n + 1 \in \mathcal{P}$. Sinon, c'est que $n + 1$ possède un diviseur $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, n + 1\}$. Mais en tant que diviseur de $n + 1$, d est majoré par $n + 1$ et on a donc $2 \leq d \leq n$. Par hypothèse de récurrence, il possède donc un diviseur premier, et par transitivité de la divisibilité, ce dernier divise également $n + 1$. La propriété est donc vraie pour $n + 1$ et, par principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Question 3

On considère $n = 3.q + r$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$, la division euclidienne de n par 3. Si $r = 0$, alors $n = 3.q$ est divisible par 3. Si $r = 1$, alors $n - 4 = 3.q + 1 - 4 = 3.(q - 1)$ est divisible par 3. Si $r = 2$, alors $n + 4 = 3.q + 2 + 4 = 3.(q + 2)$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, l'un des entiers $n - 4$, n ou $n + 4$, est divisible par 3.