Licence – Mathématiques
Algèbre 2

INTERROGATION 2
CORRIGÉ

SUJET A**Question 1**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Alors pour tout $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $a \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, avec $N = \prod_{i=1}^k n_i$, tel que $a \equiv a_i \pmod{n_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Question 2

Soit $(G, *)$ un groupe et $e_1, e_2 \in G$ deux éléments neutres. Alors $e_1 * e_2 = e_2$ car e_1 est un élément neutre, mais par ailleurs $e_1 * e_2 = e_1$ car e_2 est un élément neutre. On en déduit donc que $e_1 = e_2$.

Question 3

On sait que 5 divise une quantité donnée si et seulement si la classe de cette quantité est $\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Travaillons donc dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Par calcul direct, on obtient que

- si $n \equiv 0 \pmod{5}$ alors $n^2 - 3n + 6 \equiv 1 \pmod{5}$;
- si $n \equiv 1 \pmod{5}$ alors $n^2 - 3n + 6 \equiv -1 \pmod{5}$;
- si $n \equiv -1 \pmod{5}$ alors $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod{5}$;
- si $n \equiv 2 \pmod{5}$ alors $n^2 - 3n + 6 \equiv -1 \pmod{5}$;
- si $n \equiv -2 \pmod{5}$ alors $n^2 - 3n + 6 \equiv 1 \pmod{5}$.

On en déduit que 5 divise $n^2 - 3n + 6$ si et seulement si $n \equiv -1 \pmod{5}$, c'est-à-dire si n est de la forme $5k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 0.1. On aurait aussi pu observer que $n^2 - 3n + 6 \equiv n^2 + 2n + 1 \equiv (n + 1)^2 \pmod{5}$ et que, comme 5 est premier, on a $(n + 1)^2 \equiv 0 \pmod{5}$ si et seulement si $n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.

SUJET B**Question 1**

Un groupe est un ensemble G munie d'une opération $*$: $G \times G \longrightarrow G$ telle que :

- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$;
- $\exists e \in G, \forall g \in G, e * g = g * e = g$;
- $\forall g \in G, \exists g' \in G, g * g' = g' * g = e$.

Question 2

Soit G un groupe et $g \in G$ un élément. Supposons que $g_1, g_2 \in G$ soient deux inverses pour g . Alors

$$g_1 = g_1 * e = g_1 * (g * g_2) = (g_1 * g) * g_2 = e * g_2 = g_2.$$

Question 3

On sait que 17 divise une quantité donnée si et seulement si la classe de cette quantité est $\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Travaillons donc dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. On a alors

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 15 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n \\ &\equiv (-2) \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n \pmod{17} \\ &\equiv 8^n(2 - 2) \equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$