

**Licence – Mathématiques
Algèbre 2****INTERROGATION 3
CORRIGÉ****SUJET A****Question 1**

Soit G_1, G_2 eux groupes. Une application $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un monomorphisme de groupes si :

- pour tout $g_1, g_2 \in G_1$, $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$;
- f est injective.

Question 2

Soit G un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G . Alors $H := \bigcap_{i \in I} H_i$ est non vide car $e_G \in H$ puisque, pour tout $i \in I$, $H_i \subset G$ est un sous-groupe, et donc $e_G \in H_i$. De plus, si $h_1, h_2 \in H$, alors de même, on a $h_1, h_2 \in H_i$ pour tout $i \in I$ et de fait $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H_i$ puisque H_i est un sous-groupe, et donc $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

Question 3

Pour avoir des groupes, on considère l'addition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Il faut donc vérifier que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. Or, en notant $M_{i,j}$ le coefficient d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positionné à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne i et la $j^{\text{ème}}$ colonne, on a

$$\text{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (A+B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n A_{i,i} + B_{i,i} = \sum_{i=1}^n A_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

SUJET B**Question 1**

Soit G un groupe et $X \subset G$ un sous-ensemble. Le sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par X est défini comme l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X .

Question 2

Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Si f est injectif, alors $f^{-1}(e_{G_2})$ ne contient au plus qu'un élément ; or $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$, donc $\text{Ker}(f) = f^{-1}(e_{G_2}) = \{e_{G_1}\}$. Réciproquement, si $\text{Ker}(f) = \{e_{G_1}\}$ et que $f(g_1) = f(g_2)$ pour $g_1, g_2 \in G_1$, alors $f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} = e_{G_2}$ et donc $g_1 \cdot g_2^{-1} = e_{G_1}$ par hypothèse. On en déduit que $g_1 = g_2$, et donc que f est injective.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g^n = e$, on a $(g^n)^{-1} = e^{-1} = e$ et donc $(g^{-1})^n = e$. En appliquant le même principe à g^{-1} , on en déduit que $\{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid (g^{-1})^n = e\}$ et donc que $|g| = |\{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}| = |\{n \in \mathbb{Z} \mid (g^{-1})^n = e\}| = |g^{-1}|$.