Licence – Mathématiques
Algèbre 2

INTERROGATION 4
CORRIGÉ

SUJET A

Question 1

Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation.

Question 2

Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe. Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe car, pour tout $g_1, g_2 \in \text{Ker}(f)$, on a $f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1} = e \cdot e^{-1} = e$ et donc $g_1 \cdot g_2^{-1} \in \text{Ker}(f)$. Il est de plus distingué car, pour tout $h \in \text{Ker}(f)$ et $g \in G$, on a $f(g^{-1} \cdot h \cdot g) = f(g)^{-1} \cdot f(h) \cdot f(g) = f(g)^{-1} \cdot e \cdot f(g) = f(g)^{-1} \cdot f(g) = e$ et $\text{Ker}(f)$ est donc bien stable par conjugaison.

Question 3

Il suffit de considérer l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ x & \longmapsto & e^{2\pi i x} \end{array} .$$

C'est un morphisme de groupe car $e^{2\pi i(x_1+x_2)} = e^{2\pi i x_1} \cdot e^{2\pi i x_2}$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Il induit donc un isomorphisme entre $\mathbb{R}/\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Or f est surjective et son noyau vaut $\mathbb{Z}$. On en déduit donc bien que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}$ sont isomorphes.

SUJET B

Question 1

Tout morphisme de groupes $f : G_1 \rightarrow G_2$ induit un isomorphisme de groupes $\bar{f} : G_1/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$.

Question 2

On définit l'application

$$F_\varphi: \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(X_1) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(X_2) \\ \sigma & \longmapsto & \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \end{array} .$$

C'est un morphisme de groupes car, pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}(X_1)$, on a

$$F_\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varphi \circ \sigma_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma_2 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \varphi^{-1} = F_\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2).$$

Cette application est de plus bijective, d'inverse $F_{\varphi^{-1}}$; c'est donc un isomorphisme de groupes.

Question 3

Notons σ la permutation de l'énoncé. Par itérations successives, on a

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 1 \quad \text{et} \quad 4 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 8 \xrightarrow{\sigma} 4.$$

On en déduit que $\sigma = (1352)(4768)$, et donc $\sigma = (13)(35)(52)(47)(76)(68)$, et donc

$$\sigma = (12)(23)(12)(34)(45)(34)(23)(34)(45)(34)(23)(45)(56)(67)(56)(45)(67)(67)(78)(67).$$

On aurait également pu retrier à la main la permutation et noter chacune des opérations effectuées ; cela donne

$$\sigma = (67)(78)(45)(56)(67)(78)(23)(34)(45)(12).$$