Université Aix-Marseille	2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Partiel
8 mars 2019

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Exercice 1. (6 points)

1. Donner la définition de :
   - un nombre premier ;
   - la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné ;
   - l'ordre d'un élément dans un groupe.
2. Enoncer le lemme de Gauss, et le démontrer à l'aide du théorème de Bachet-Bézout.

Exercice 2. (3 points)

On considère l'ensemble $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a.x + b \end{array} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ des bijections affines sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\big(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ\big)$ est un groupe.
2. Est-il abélien ?

Exercice 3. (4 points)

Le but de cet exercice est de trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation

$$2x^2 + 5y^2 = 1000. \tag{1}$$

1. On note $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (1).
   (a) Montrer que 5 divise x_0 et que 2 divise y_0. En déduire une solution $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $5x^2 + 2y^2 = 100$.
   (b) Montrer que 2 divise x_1 et que 5 divise y_1. En déduire une solution $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $2x^2 + 5y^2 = 10$.
   (c) En déduire une solution de l'équation $5x^2 + 2y^2 = 1$.
2. Déterminer le nombre de solution de l'équation (1).

Exercice 4. (8 points)

1. (a) Donner une relation de Bachet-Bézout entre les entiers 13 et 17.
   (b) En déduire deux entiers $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv 1 \ [17] \\ \alpha \equiv 0 \ [13] \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} \beta \equiv 0 \ [17] \\ \beta \equiv 1 \ [13] \end{array} \right.$.
2. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} n_1 \equiv n_2 \ [17] \\ n_1 \equiv n_2 \ [13] \end{array} \right.$. Montrer que 221 divise $n_2 - n_1$.
3. L'équipage d'un bateau pirate est composé de dix-sept marins et un cuistot. Suite à la prise d'un trésor, les pirates se répartissent le butin en donnant le même nombre de pièces d'or à chaque marin et en donnant le reste au cuistot. Ce dernier doit alors remporter trois pièces d'or. Mais suite à une bagarre, quatre marins meurent et la répartition du trésor est refaite en suivant la même règle. Le cuistot gagne alors neuf pièces d'or de plus. Enivré par ce gain soudain, il décide d'empoisonner tout le monde et de partir avec le butin tout entier. Quel est alors, au minimum, son gain ?