Université Aix-Marseille 2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Seconde session
juin 2019

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner la définition :
   (a) de deux entiers congrus modulo $n \in \mathbb{N}^*$;
   (b) dans un groupe G, du conjugué de $g \in G$ par $h \in G$;
   (c) d'un anneau intègre.
2. Enoncer et démontrer le premier théorème d'isomorphisme pour les groupes.
3. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau unitaire forme un groupe pour la multiplication.

Exercice 2. (10 points)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier. On pose

$$U_p = \left\{ e^{\frac{2ia\pi}{p^k}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On rappelle qu'un groupe G est dit *monogène* s'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$, où $\langle g \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par g ; et qu'il est dit *cyclique* s'il est monogène et fini.

1. (a) Montrer que U_p est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que U_p est un groupe d'ordre infini dont tous ses éléments sont d'ordre fini.
   (c) Montrer que U_p n'est pas monogène.
2. Le but de cette question est de montrer que, parmi tous les sous-groupes de U_p, seul U_p n'est pas cyclique. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $G_k = \langle e^{\frac{2i\pi}{p^k}} \rangle$.
   (a) Montrer que, pour tout $k_1 \leq k_2 \in \mathbb{N}$, on a $G_{k_1} \subset G_{k_2}$.
   (b) Montrer que $\cup_{k \in \mathbb{N}} G_k = U_p$.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.
   (d) Soit $H \subset U_p$ un sous-groupe tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H \neq G_k$.
      i. On fixe $x \in H$.
         α. Justifier l'existence de $k_x = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x \in G_k\}$.
         β. Montrer que $x = e^{\frac{2i\pi a}{p^{k_x}}}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ premier avec p.
         γ. Montrer que $G_{k_x} \subset H$.
      ii. Montrer que $H = U_p$.
   (e) Conclure.

Exercice 3. (5 points)
On note $A := \left\{ \frac{a+i\sqrt{3}b}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \equiv b \mod 2 \right\}$.

1. (a) Montrer que, pour tous $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, $a.a' - 3.b.b' - a.b' - b.a'$ est congru à $(a-b).(a'-b')$ modulo 4.
   (b) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est dans A.
3. Montrer que si un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contient $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors il contient également $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, 1 et $i\sqrt{3}$.
4. Montrer que A est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.