Université Aix-Marseille	2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

TD2 : Groupes

Généralités

Exercice 1.

1. Montrer que $\big(]-1,1[,*\big)$ avec $x*y := \frac{x+y}{1+x.y}$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $\big(\mathbb{R}^2,*\big)$ avec $(x_1,x_2)*(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2.e^{y_1}+y_2.e^{x_1})$ est un groupe abélien.
3. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Pour tout $A,B \in \mathcal{P}(E)$, on note $A\Delta B := (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ leur différence symétrique. montrer que $\big(\mathcal{P}(E),\Delta\big)$ est un groupe.

Exercice 2. On pose

$$f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z \end{array} \qquad f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z} \end{array} \qquad f_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & -z \end{array} \qquad f_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & -\frac{1}{z} \end{array}.$$

Montrer que $\big(\{f_1,f_2,f_3,f_4\},\circ\big)$ est un groupe abélien d'ordre 4.

Exercice 3. On souhaite définir uns structure de groupe sur l'ensemble $\mathbb{H} := \{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ telle que $i^2=j^2=k^2=i.j.k=-1$.

1. Compléter la table d'une potentielle loi de composition interne.
2. Vérifier que cela définit bien une structure de groupe. C'est ce qu'on appelle l'ensemble des *quaternions*.

Exercice 4. Soit G un groupe, $g_1,g_2 \in G$. Montrer que

1. $(g_1.g_2.g_1^{-1})^n = g_1.g_2^n.g_1^{-1}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$;
2. si $(g_1.g_2)^n = e$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, alors $(g_2.g_1)^n = e$;
3. si $g_1^{-1}.g_2.g_1 = g_2^{-1}$ et $g_2^{-1}.g_1.g_2 = g_1^{-1}$, alors $g_1^2 = g_2^2$ et $g_1^4 = g_2^4 = e$.

Exercice 5. Soit G un groupe.

1. Soit $g\in G$. Montrer que $Z(g) := \{h\in G \mid g.h = h.g\}$ est un sous-groupe de G. C'est ce qu'on appelle le *centralisateur de g*.
2. Montrer que $Z(G) := \{g\in G \mid \forall h\in G, g.h = h.g\}$ est un sous-groupe de G. C'est ce qu'on appelle le *centre de G*.
3. Montrer que $Z(G) = \cap_{g\in G} Z(g)$.

Exercice 6. Soit G un groupe et $H_1,H_2\subset G$ deux sous-groupes tels que $H_1\cup H_2$ soit un sous-groupe. Montrer que parmi H_1 et H_2, il y en a un qui est inclu dans l'autre.

Exercice 7. Soit $(G_1,*_1)$ et $(G_2,*_2)$ deux groupes. On munit $G_1\times G_2$ de la loi de composition interne

$$*\colon \begin{array}{ccc} (G_1\times G_2)\times(G_1\times G_2) & \longrightarrow & G_1\times G_2 \\ \big((g_1,g_2),(h_1,h_2)\big) & \longmapsto & (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2) \end{array}.$$

Montrer que $(G_1\times G_2,*)$ est un groupe. C'est ce qu'on appelle la structure de *groupe produit*.

Exercice 8. Soit G un groupe.

1. Soit $g\in G$.
   (a) Montrer que $\langle g\rangle = \{g^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

   (b) Montrer que $|\langle g\rangle| = |g|$.
2. Soit $X \subset G$ un sous-ensemble. Montrer que

$$\langle X\rangle = \left\{ \prod_{i=1}^{k} x_i^{\varepsilon_i} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et, pour tout } i \in [\![1,k]\!],\ x_i \in X, \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \right\}.$$

3. (a) Montrer que $\mathbb{Q}^*$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.
   (b) Montrer que $\mathbb{Q}^* = \langle \mathcal{P} \sqcup \{-1\}\rangle$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 9. Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2.

1. Montrer que G est abélien.
2. On suppose maintenant que G est de plus fini.
   (a) Soit $H \subset G$ un sous-groupe et $g \in G \setminus H$. Montrer que $|\langle H \cup \{g\}\rangle| = 2|H|$.
   (b) En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 10.

1. Montrer que que les isométries du plan $\mathbb{R}^2$ forment un groupe pour la composition.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$. On considère $A_1, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier à n côtés.
   (a) Montrer que les isométries laissant l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$ globalement stable[1] est un sous-groupe des isométries du plan. Ce groupe est appelé *groupe diédral*, noté[2] D_n.
   (b) Montrer que D_n contient un élément d'ordre n et un élément d'ordre 2.
   (c) Montrer que tout élément de D_n est entièrement déterminé par l'image de A_1 et A_2. En déduire que $|D_n| = 2n$.

Exercice 11. Soit G un groupe et $g_1, g_2 \in G$.

1. Montrer que $|g_1^{-1}| = |g_1|$.
2. Montrer que $|g_2.g_1.g_2^{-1}| = |g_1|$.
3. Montrer que $|g_1.g_2| = |g_2.g_1|$.
4. (a) On suppose de plus que G est abélien et que $\operatorname{pgcd}(|g_1|, |g_2|) = 1$. Montrer que $|g_1.g_2| = \operatorname{ppcm}(|g_1|, |g_2|) = |g_1|.|g_2|$.
   (b) Trouver deux éléments $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tels que $|g_1.g_2| \neq \operatorname{ppcm}(|g_1|, |g_2|)$.
   (c) Trouver deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_3$ tels que $\operatorname{pgcd}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) = 1$ mais $|\sigma_1 \circ \sigma_2| \neq \operatorname{ppcm}(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$.

Morphismes de groupes

Exercice 12. Parmi les applications suivantes, dire lesquelles sont des morphismes de groupes.

- $\begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C},+) \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$, $\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,.) \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$;
- $\begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{R},+) \\ z & \longmapsto & |z| \end{array}$, $\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*,.) \\ z & \longmapsto & |z| \end{array}$;
- $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & (\{\pm 1\},.) \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & (\{\pm 1\},.) \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \end{array}$;

1. c'est-à-dire l'ensemble des isométrie f telle que $f(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{A_1, \ldots, A_n\}$
2. on le trouve aussi parfois noté D_{2n}, il faut donc toujours faire attention à la convention utilisée

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \overline{n} & \longmapsto & \overline{n}^2 \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \overline{n} & \longmapsto & \overline{n}^2 \end{array}$

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$;

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array}$;

- $\begin{array}{ccc} \big(\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\big) & \longrightarrow & \big(\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\big) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \big(\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}^*),\,.\,\big) & \longrightarrow & \big(\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}^*),\,.\,\big) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$,

  où $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{(*)})$ représente l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{(*)}$.

Exercice 13. On considère l'application

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ \overline{k} & \longmapsto & \overline{3k} \end{array}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est un morphisme de groupes.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14. On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\sigma\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) \end{array}.$$

1. Montrer que $\big(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\big)$ est un groupe.
2. Montrer que σ est un endomorphisme de groupe.
3. Caractériser l'image et le noyau de σ.

Exercice 15. Soit $n,m \in \mathbb{N}^*$ et n',m' tels que $n = n'.\mathrm{pgcd}(n,m)$ et $= m'.\mathrm{pgcd}(n,m)$. On considère l'application

$$\mathrm{mult}_m^n\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{k} & \longmapsto & \overline{m}.\overline{k} \end{array}.$$

1. Montrer que mult_m^n est un endomorphisme de groupe.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{k} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{mult}_m^n)$. Montrer que $n' \mid k$.
3. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{mult}_m^n)$ est engendré par l'image de $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(m)}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 16.

1. Montrer qu'un endomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est entièrement déterminé par $f(1)$. En déduire tous les endomorphismes, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les endomorphismes, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer tous les endomorphismes continus de $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit G un groupe. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

est un morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Exercice 18. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes.

1. Soit $g \in G_1$ un élément d'ordre fini. Montrer que $|f(g)|$ est fini et qu'il divise $|g|$.
2. Soit $H \subset G_1$ un sous-groupe fini. Montrer que $f(H) \subset G_2$ est fini et que $|f(H)|$ divise $|H|$.

Exercice 19. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Montrer que si $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$ vérifient $g_2 = f(g_1)$, alors $f^{-1}(g_2) = g_1.\mathrm{Ker}(f)\Big(:= \{g.h \mid h \in \mathrm{Ker}(f)\}\Big)$.

Exercice 20.

1. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +\right)$ et $\left(\{\pm 1\}, .\right)$ sont isomorphes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
   (a) Montrer que $(\mathbb{U}_n, .)$ est un groupe.
   (b) Montrer que $(\mathbb{U}_n, .)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\right)$.

Exercice 21.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
2. Montrer que D_3 et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 22. Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes. On se donne un morphisme de groupe $\varphi : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ et on munit $G_1 \times G_2$ de la loi de composition interne

$$*_1 \rtimes_\varphi *_2 : \begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ \big((g_1, g_2), (h_1, h_2)\big) & \longmapsto & \Big(g_1 *_1 \big(\varphi(g_2)\big)(h_1)\ ,\ g_2 *_2 h_2\Big) \end{array}.$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, *_1 \rtimes_\varphi *_2)$ est un groupe. C'est ce qu'on appelle le *produit semi-direct* associé à φ. On le note $G_1 \rtimes_\varphi G_2$, ou seulement $G_1 \rtimes G_2$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur φ.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$.

1. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \\ \overline{k} & \longmapsto & \begin{cases} g \mapsto g & \text{si k=0} \\ g \mapsto g^{-1} & \text{si k=1} \end{cases} \end{array}$$

   est un morphisme de groupe bien défini.
2. Montrer que le groupe diédral D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 24. On considère l'ensemble M des morphismes de groupes allant de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

1. Montrer que tout élément $f \in M$ est entièrement déterminé par $f(\overline{1})$.
2. Déterminer le cardinal de M.
3. Déterminer le nombre d'épimorphismes de groupes dans M.

Exercice 25. Montrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Groupes quotients

Exercice 26.

1. (a) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe distingué.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ est isomorphe à $\{\pm 1\}$.
2. (a) Montrer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-groupe distingué.
   (b) Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué.

(b) Montrer que ${}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}\!/\!_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 27. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Pour tout $g \in G$, on note $g.H := \{g.h \mid h \in H\}$ et $H.g := \{h.g \mid h \in H\}$. Montrer que H est distingué si et seulement si, pour tout $g \in G$, $g.H = H.g$.

Exercice 28. Soit G un groupe.

1. Montrer que $Z(G)$ est distingué.
2. On note $[G, G] := \langle \{g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1} \mid g_1, g_2 \in G\} \rangle$.
   (a) Montrer que $[G, G]$ un sous-groupe distingué de G.
   (b) Montrer que le groupe ${}^{G}\!/\!_{[G,G]}$ est abélien.
   (c) Soit $H \subset G$ un sous-groupe distingué tel que ${}^{G}\!/\!_{H}$ soit abélien. Montrer que $[G, G] \subset H$.

Exercice 29. Soit G un groupe.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$, le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G, est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.
2. A l'aide de l'application $\mathrm{conj} : G \to \mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est isomorphe à ${}^{G}\!/\!_{Z(G)}$.

Exercice 30.

1. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes, et $H \subset G_2$ un sous-groupe distingué. Montrer que $f^{-1}(G_2)$ est distingué.
2. Montrer que l'image directe d'un sous-groupe distingué $H \subset G_1$ par un morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ n'est pas forcément un sous-groupe distingué de G_2.

Exercice 31. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2.

1. Montrer que H est distingué.
2. Déterminer à quel groupe classique ${}^{G}\!/\!_{H}$ est isomorphe.

Exercice 32. On note O l'origine du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\{\text{rotations autour de } O\}$ est un sous-groupe non distingué des isométries du plan.

Exercice 33. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère les ensembles

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \qquad \mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \qquad \mathbb{U}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^{=}1\}.$$

1. Montrer que, pour la multiplication, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_\infty$ sous des sous-groupes distingués de $\mathbb{C}^*$, et que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_\infty \subset \mathbb{U}$.
2. Montrer que les groupes ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$, ${}^{\mathbb{C}^*}\!/\!_{\mathbb{R}_+^*}$, ${}^{\mathbb{C}^*}\!/\!_{\mathbb{R}^*}$ et ${}^{\mathbb{U}}\!/\!_{\mathbb{U}_n}$ sont tous isomorphes à $\mathbb{U}$.
3. Montrer que ${}^{\mathbb{C}^*}\!/\!_{\mathbb{U}_n}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.
4. Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est isomorphe à ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$.

Exercice 34.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément d'ordre n dans ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$.
3. Montrer que tout élément de ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ est d'ordre fini.

Exercice 35.

1. Montrer que la relation "être un sous-groupe" est une relation d'ordre sur les groupes.
2. Montrer que la relation "être un sous-groupe distingué" n'est pas une relation d'ordre sur les groupes.

Exercice 36. Soit $n_1, \ldots, n_k \in N^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{n_1\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{n_2\mathbb{Z}} \times \cdots \times {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{n_k\mathbb{Z}} \\ n & \longmapsto & \big(n\ [n_1], n\ [n_2], \ldots, n\ [n_k]\big) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Redémontrer le théorème des restes chinois.

Groupes de permutations

Exercice 37.

1. Ecrire les permutations suivantes comme produits de cycles à supports disjoints :
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;
   - $(624) \circ (361) \circ (12)$.
2. Ecrire les permutations suivantes comme produits de transpositions élémentaires :
   - $(142)(3576)$;
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Calculer la signatures des permutations suivantes :
   - $(316)(24)$;
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $c = (k_1 k_2 \cdots k_\ell) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur $\ell \geq 2$.
   (a) Donner explicitement l'inverse de c.
   (b) Déteminer $|c|$.
   (c) Déterminer $\operatorname{sign}(c)$.
2. On note $c_1 \circ \cdots \circ c_r$ la décomposition d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en cycles à supports disjoints.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^k = c_1^k \circ \cdots \circ c_r^k$.
   (b) Montrer que l'ordre de σ est égal au plus petit multiple commun des longueurs des c_i.
   (c) Montrer que $\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{|c_i|+1}$, et en déduire que $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{p_\sigma}$, où $p_\sigma \in \mathbb{N}$ est le nombre de cycles de longueur paire dans la décomposition de σ.
3. Décomposer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 10 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer son ordre et sa signature.

Exercice 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $c := (k_1 k_2 \cdots k_s) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(k_1)\sigma(k_2)\cdots\sigma(k_s)\big).$$
2. En déduire que deux cycles de $\mathfrak{S}_n$ ayant même longueur sont toujours conjugués.
3. Montrer que deux permutations dans $\mathfrak{S}_n$ dont les décompositions en cycles à supports disjoints possèdent le même nombre de cycles de longueur ℓ pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$ sont conjugués.
4. Soit $\sigma_1 := (327)(19)(485)$ et $\sigma_2 := (48)(129)(365)$. Trouver $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ telle que $\sigma_2 = \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $m \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe un morphisme de groupe non trivial $f : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 41. Le but de l'exercice est de montrer que, pour $n \geq 3$, le centre $Z(\mathcal{S}_n)$ du groupe $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité.

1. Soit $i \in \{1 \ldots n\}$, donner un exemple de permutation s fixant i et seulement i.
2. Soit $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, en utilisant le fait que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$, montrer que $\sigma(i) = i$.
3. Conclure que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité.

Exercice 42. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathfrak{S}_n = \Big\langle \big\{(12), (12\cdots n)\big\} \Big\rangle$.

Exercice 43. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{6\}$. Le but de l'exercice est de montrer que tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont *intérieurs*, c'est-à-dire de la forme $(h \mapsto g^{-1}.h.g)$ pour un certain $g \in \mathfrak{S}_n$.

1. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $Z_{\mathfrak{S}_n}\big(\varphi(\sigma)\big) = \varphi\big(Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)\big)$, où $Z_{\mathfrak{S}_n}(a)$ dénote le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commute avec $a \in \mathfrak{S}_n$.
2. Pour tout $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, donner la décomposition en cycles disjoints de $\sigma'.\sigma.\sigma'^{-1}$ en fonction de celle de σ.
3. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note k_i le nombre de i–cycles dans la décomposition en cycles disjoints de σ. Montrer que $|Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)| = \prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}$.
4. En déduire que φ envoie toute transposition sur une transposition.
5. En déduire que φ est intérieur.

Exercice 44. (l'impasse "Reservoir dogs") Dans un moment de tension intense, n mafieux, disposés dans une pièce (on supposera qu'ils sont tous à des distances différentes les uns des autres), pointent chacun leur arme vers la personne la plus proche. Soudain, un ballon éclate et tous tirent. Montrer que, si n est impair, alors il y a au moins un survivant.