Université Aix-Marseille 2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

TD3 : Anneaux

Généralités

Exercice 1. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on rappelle que $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que $\big(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap\big)$ est un anneau commutatif et unitaire.

Exercice 2. Soit $(A, +)$ un groupe abélien et $\ . : A \times A \to A$ une opération associative sur A. Montrer que $(A, +, \ .\ )$ est un anneau si et seulement si, pour tout $a \in A$, les applications

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & a.b \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & b.a \end{array}$$

sont des morphismes de groupes.

Exercice 3. Soit A_1 et A_2. On munit $A_1 \times A_2$ des lois de composition interne

$$+ : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{array}$$

et

$$. : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1.b_1, a_2.b_2) \end{array}.$$

1. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \ .\ )$ est un anneau. C'est ce qu'on appelle la structure de *groupe produit*.
2. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \ .\ )$ est unitaire et/ou commutatif que si A_1 et A_2 le sont.

Exercice 4. Montrer que les suites réelles convergentes forment un sous-anneau unitaire des suites réelles.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)^\times = \big\{\overline{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ premier avec } n\big\}$.
2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un anneau unitaire.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\times$ est l'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.

Exercice 6.

1. On note $\mathcal{G} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble dit des *entiers de Gauss*.
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer $\mathcal{G}^\times$ possède 4 éléments.
2. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ possède une infinité d'éléments.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un diviseur de zéro si et seulement si k n'est pas premier avec n.
   (b) En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est intégre que si n est premier.

2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
      i. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(M)$.
      ii. En déduire que M est un diviseur de zéro.
   (b) Déterminer l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\varphi(n) := \left\{k \in [\![1, 1]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\right\}$. C'est ce q'on appelle la fonction *indicatrice d'Euler*.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = \left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times\right|$.
2. Montrer que, pour tout nombre premier p, $\varphi(p) = p - 1$.
3. Montrer que, pour tout nombre premier p et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
4. A l'aide du théorème des restes chinois, montrer que, pour tout entiers $n_1, n_2 \geq 2$ tels que $\mathrm{pgcd}(n_1, n_2) = 1$, $\varphi(n_1.n_2) = \varphi(n_1).\varphi(n_2)$.
5. Montrer que, pour tout entier $n =\geq 2$, $\varphi(n) = n.\prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, où $p_1, \ldots, p_r$ sont les nombres premiers intervenant dans la décomposition de n en facteurs premiers.
6. On fixe maintenant l'entier $n \geq 2$ et, pour tout diviseur d de n, on note

$$A_d := \left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = d\right\}.$$

   (a) Montrer que, pour tout diviseur de n, $|A_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.
   (b) En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 9. Soit A un anneau. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$.

1. Montrer qu'un élément inversible ne peut pas être nilpotent.
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}^*$ décomposé en facteurs premiers. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre non nulle, alors M n'est pas nilpotente.
   (b) Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $a \in A$ un élément niloptent. A l'aide d'une identité remarquable, montrer que $1+a$ est inversible.

Exercice 10. Soit A un anneau unitaire. On considère, dans A, l'équation $x^2 = 1_A$.

1. Montrer que, si A est intègre, alors l'équation admet au plus deux solutions.
2. On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et on se place dans le cas $A = \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec $a = \mathrm{Id}$. Montrer que l'équation possède alors au moins 4^n solutions.

Exercice 11. Soit A un anneau unitaire. Pour tout ensemble $X \subset A$, on note $\langle X \rangle$ l'intersection de tous les sous-anneaux unitaires de A contenant X.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de sous-anneaux unitaires de A est un sous-anneau unitaire de A.

1. Montrer que, pour tout $X \subset A$, $\langle X \rangle$ est le plus sous-anneau unitaire de A contenant X dans le sens où il est contenu dans tout sous-anneau unitaire de A contenant X.
2. On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $\langle \emptyset \rangle = \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\langle \left\{\frac{1}{10}\right\} \rangle$ est l'ensemble des nombres décimaux.
   (c) Montrer que $\langle \{i\} \rangle = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des entiers de Gauss.
   (d) Montrer que $\langle \{e^{\frac{2i\pi}{3}}\} \rangle = \left\{\frac{a+ib\sqrt{3}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \equiv b\ [2]\right\}$.

Exercice 12. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & n\mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k.n \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes, mais n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 13. Soit A_1 et A_2 deux anneaux. On suppose que A_1 est unitaire et qu'il existe un épimorphisme d'anneaux $f : A_1 \to A_2$. Montrer que A_2 et f sont unitaires.

Exercice 14. Soit A un anneau commutatifque l'on ne suppose pas unitaire.

1. On munit $A \times \mathbb{Z}$ des lois de composition interne

$$+ : \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + a_2, n_1 + n_2) \end{array}$$

   et

$$. : \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (n_2.a_1 + n_1.a_2 + a_1.a_2 \ , \ n_1.n_2) \end{array} .$$

   Montrer que $(A \times \mathbb{Z}, +, \ . \ )$ est un anneau unitaire.
2. Montrer que tout anneau se plonge dans un anneau unitaire, c'est-à-dire que, pour tout anneau A, il existe un anneau $\mathcal{A}$ unitaire et un monomorphisme d'anneaux $f : A \to \mathcal{A}$.
3. Si A est unitaire, f est-il un isomorphisme d'anneaux ?

Exercice 15. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_{x_0}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0 \big\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un idéal.

Exercice 16. Soit A un anneau. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}(A) := \big\{ a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0 \big\}$ des éléments nilpotents est un idéal de A.

Exercice 17. Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $I = A$;
ii. I est un sous-anneau unitaire de A ;
iii. $1_A \in I$;
iv. I contient un élément inversible.

Exercice 18. En considérant l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(i) \end{array} ,$$

montrer que $\mathbb{C}$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Exercice 19. On considère $\ell(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et on note

- $\ell_C(\mathbb{Q}) := \big\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \geq N \Rightarrow |u_{n_2} - u_{n_1}| < \frac{1}{k} \big\}$ le sous-ensemble des suites *de Cauchy* ;
- $\ell_0(\mathbb{Q}) := \big\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{k} \big\}$ le sous-ensemble des suites *convergeant vers* 0.

1. (a) Montrer que tout élément de $\ell_C(\mathbb{Q})$ est une suite bornée.
   (b) En déduire que $\ell_C(\mathbb{Q})$ est un sous-anneau de $\ell(\mathbb{Q})$.
2. Montrer que $\ell_0(\mathbb{Q})$ est un idéal de $\ell_C(\mathbb{Q})$.
3. (a) Montrer qu'une suite dans $\ell_C(\mathbb{Q})$ converge dans $\mathbb{R}$.
   (b) En considérant l'application

$$\lambda : \begin{array}{ccc} \ell_C(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n \to \infty} u_n \end{array} ,$$

   montrer que $\mathbb{R}$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\ell_C(\mathbb{Q})/\ell_0(\mathbb{Q})$.

C'est en réalité ainsi que l'on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

Propriétés d'anneaux

Dans toute cette section, on ne considérera que des anneaux *commutatifs* et *unitaires*.

Exercice 20. Montrer que, dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] := \left\{a + \sqrt{10}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, 2 est irréductible mais pas premier.

Exercice 21. Montrer que, dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \left\{a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$:

1. 3 et $2 + i\sqrt{5}$ n'ont pas de plus petit multiple commun ;
2. 9 et $3(2 + i\sqrt{5})$ n'ont pas de plus grand diviseur commun.

Exercice 22. Soit A un anneau. On dit qu'un idéal $I \subset A$ est

- *premier* si ${}^{A}\!/_{I}$ est intègre.
- *maximal* si ${}^{A}\!/_{I}$ est un corps.

1. Montrer que, pour tout $a \in A$, a est premier si et seulement si (a) l'est.
2. Montrer que si I est un idéal maximal et que J est un idéal tel que $I \subset J \subset A$, alors $J = I$ ou $J = A$.
3. Montrer que tout idéal maximal est premier.

Exercice 23. Soit A un anneau intègre et $a, b \in A$ deux éléments admettant un plus petit multiple commun $m \in A$, c'est-à-dire tel que $(a) \cap (b)$ soit principal. Montrer que a et b admet alors un plus grand diviseur commun $d \in A$ tel que $d.m = a.b$.

Exercice 24. Soit $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ l'anneau des entiers de Gauss. On considère l'application

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a + ib & \longmapsto & a^2 + b^2 \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\widetilde{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\widetilde{z} - z|^2 \leq \frac{1}{2}$.
2. En considérant, pour tout $a \in \mathbb{Z}[i]$ et $b \in \mathbb{Z}[i]^*$ une approximation dans $\mathbb{Z}[i]$ de $\frac{a}{b} \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.
3. Déterminer un plus grand diviseur commun, ainsi qu'une relation de Bézout associé pour $1 + 3i$ et $3 + i$.

Exercice 25. Soit A un anneau muni d'un structure euclidienne par un stathme ν. Montrer que ν admet un minimum sur A, atteint en 0 et uniquement en 0.