Université Aix-Marseille 2018–2019

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

EXAMEN TERMINAL
14 mai 2019

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié. L'épreuve dure deux heures.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner la définition :
   (a) du reste de la division euclidienne de $n \in \mathbb{Z}$ par $k \in \mathbb{N}^*$;
   (b) de la signature d'une permutation ;
   (c) d'un idéal pour un anneau.
2. Enoncer le théorème de Lagrange.
3. Montrer que si f est un isomorphisme unitaire d'anneaux, alors f^{-1} l'est aussi.

Exercice 2. (6 points)

1. (a) Déterminer tous les diviseurs de zéros de $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer un inverse pour $\overline{183}$ dans $\mathbb{Z}/247\mathbb{Z}$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/247\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{183}.x + \overline{236} = \overline{0}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \overline{3}.x + \overline{2} = \overline{0}$.

Exercice 3. (5 points) Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0_A$.

1. Montrer que si $a \in A$ est nilpotent, alors $a.b$ l'est aussi pour tout $b \in A$.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $\mathcal{N}(A)$, l'ensemble des éléments nilpotents de A, est un idéal de A.
3. A l'aide d'une identité remarquable, montrer que si $a \in A$ est nilpotent, alors $1_A - a$ et $1_A + a$ sont inversibles.

Exercice 4. (6 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $P(\sigma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne, noté $P(\sigma)_{ij}$, vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

Par exemple, si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$, alors

$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Soit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$.
      i. Soit $i, j, k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $P(\sigma_1)_{ik}.P(\sigma_2)_{kj} \neq 0$ si et seulement $k = \sigma_1^{-1}(i) = \sigma_2(j)$.
      ii. En déduire que $P(\sigma_1).P(\sigma_2) = P(\sigma_1 \circ \sigma_2)$.
   (b) i. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition élémentaire. Montrer que $\det\big(P(\tau)\big) = -1$.
      ii. En déduire que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det\big(P(\sigma)\big) = \text{signature}(\sigma)$.
2. Montrer que l'application
$$P\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & P(\sigma) \end{array}$$
   est bien définie, et qu'il s'agit d'un monomorphisme de groupes.
3. Montrer que tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.