Aix–Marseille Université 2018-2019

Mathématiques – M1

DEVOIR SURVEILLÉ– ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE-2H

Les exercices et questions ne sont pas tous indépendants, tout résultat énoncé dans une question pourra notamment être réutilisé même si la question n'a pas été elle-même traitée.

Exercice 1 Soit G un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice deux tel que $G \setminus H$ contient un élément g_0 d'ordre deux. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} G & \to & H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g & \mapsto & \begin{cases} (g,0) & \text{si } g \in H \\ (g_0.g,1) & \text{si } g \notin H \end{cases} \end{array}$$

définit un isomorphisme de groupes.

Exercice 2 On considère G un groupe abélien à huit éléments.

1. On suppose que G possède un élément d'ordre huit. Montrer que G est cyclique.
2. On suppose que G ne possède pas d'élément d'ordre huit mais qu'il possède un élément d'ordre quatre. On note H le sous-groupe engendré par un tel élément.
   (a) Montrer que $G \setminus H$ contient un élément d'ordre deux.
   (b) En déduire que G est un produit de deux groupes cycliques.
3. On suppose que G ne possède ni d'élément d'orde huit ni d'ordre quatre.
   (a) Déterminer l'ordre d'un sous-groupe engendré par deux éléments distincts non triviaux.
   (b) Montrer que G est un produit de groupes cycliques.

Exercice 3 On considère le groupe G engendré par deux éléments r, s vérifiant $r^4 = s^2 = Id$ et $srs = r^{-1}$.

1. Trouver le cardinal de G, et lister les éléments et leurs ordres.
2. Montrer que G est un produit semi- direct de deux groupes.
3. Donner le nom usuel de ce groupe.

Exercice 4 On considère le sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le cardinal de G, et lister les éléments et leurs ordres.
2. Montrer que G n'est pas commutatif.
3. On considère le centre $Z(G) = \{h \in G, hg = gh, \forall g \in G\}$.
   (a) Montrer que $Z(G)$ n'est pas réduit à Id, en faisant agir G sur lui même par conjugaison.
   (b) Déterminer $Z(G)$.
4. Lister les sous-groupes distingués de G.

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 5 Soit G un groupe à huit éléments.

1. Si G ne possède que des éléments d'ordre deux, montrer que G est abélien.
2. (a) Supposons maintenant que G n'est pas abélien, montrer qu'il possède un élément d'ordre quatre qui ne soit pas un carré. On note H le sous-groupe engendré par un tel élément.
   (b) Montrer que H est distingué.
   (c) On suppose que $G \setminus H$ contient un élément d'ordre deux. A quel groupe usuel G est-il isomorphe ?
   (d) On suppose que $G \setminus H$ ne contient pas d'élément d'ordre deux. A quel groupe usuel G est-il isomorphe ?