Aix–Marseille Université	2018-2019

Mathématiques – M1

CORRECTION– ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Exercice 1 Remarquons d'abord que si g n'est pas dans H, alors g_0g est dans H. C'est évident si $g = g_0$ car $gg_0 = Id$. Et sinon, on le montre par l'absurde. Comme H est d'indice 2, G est l'union de H et de g_0H. Donc g_0g est dans g_0H, et donc g serait dans H, contradiction. Ainsi l'application, notée f est bien définie. Soient g, g' deux éléments de G. On doit montrer que $f(gg') = f(g)f(g')$. On a alors plusieurs cas :

— Si g, g' sont dans H, alors $f(gg') = (gg', 0) = f(g).f(g')$.

— Si g est un élément de H et pas g', alors $f(g)f(g') = (g, 0).(g_0g', 1) = (g_0gg', 1)$. Comme gg' ne peut être dans H, on a bien que $f(gg') = (g_0gg', 1)$.

— Si g' est élément de H et pas g, ce cas est similaire au précédent.

— Si aucun des deux n'est dans H, alors $f(g)f(g') = (g_0^2gg', 0) = (gg', 0)$. Le produit gg' est alors dans H car d'après le premier point il existe h, h' tels que $g = g_0h, g' = g_0h'$ et $gg' = g_0^2hh' = hh'$. Donc on a bien que $f(gg') = f(g)f(g')$.

Exercice 2

1. Si un élément g est d'ordre 8, alors le groupe contient les termes $g^i, i = 0\dots7$. Donc le groupe est cyclique engendré par g, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. (a) Dans G tout élément est donc d'ordre $1, 2$ ou 4. Le seul élément d'ordre 1 est bien sûr l'identité. L'ensemble $G \setminus H$ contient 4 éléments. Si aucun n'est d'ordre deux, alors chacun est d'ordre quatre, mais alors G contiendrait trop d'éléments.✠

   (b) On utilise alors l'exercice 1, et on a un isomorphisme entre G et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. (a) Soient x, y deux tels éléments, alors xy est aussi d'ordre deux. On a donc la relation $xyxy = Id$ et il est clair que $xy = yx$. Le groupe engendré est donc
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
   (b) On utilise alors l'exercice 1, et on a un isomorphisme entre G et le groupe
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exercice 3

1. Comme $r^4 = Id$, l'ordre de r divise 4. Supposons d'abord que r est d'ordre deux. On aurait $srs = r$, soit $sr = rs$. Et on aurait $srsr = srrs = Id$. Ainsi le groupe aurait 4 éléments Id, r, s, sr et serait égal à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Il serait donc abélien.

   Supposons maintenant que r est d'ordre 4. Ce groupe contient alors Id, r, r^2, r^3, s. De plus on a $r^{-1} = r^3$. La dernière relation dit que $sr = r^3s$. On a donc sr différent de rs, car sinon r ne serait pas d'ordre quatre. De même r^2s est différent des éléments cités. Enfin on voit que $sr^2 = r^3sr = r^3r^3s = r^2s$. En conclusion G possède huit éléments :

$$Id, r, r^2, r^3, s, rs, sr, r^2s.$$

Il y a deux éléments d'ordre 4 : r, r^3. Il y a 5 éléments d'ordre 2 : s, sr, rs, r^2s, r^2.

2. On voit alors que G possède comme sous groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: le groupe engendré par r. Ce sous-groupe est alors distingué, grâce à la relation $srs = r^{-1}$, et il est d'indice deux dans G. En effet son quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est alors un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la loi de groupe est alors :

$$(r^i, s).(r'^j s') = (r^{i+j},)$$

✠

3. On considère un carré dans le plan euclidien. Le groupe considéré est alors le groupe des isométries préservant ce carré. L'élément r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ centré au centre du carré et s est une symétrie orthogonale par rapport à une diagonale. C'est le groupe diédral D_4.

Exercice 4

1. On note les trois matrices I, J, K. Chaque matrice est inversible et on voit que $I^2 = J^2 = K^2 = -Id$. De plus on voit que $IJ = -K, IK = -J, KJ = -I.$. On a de plus $IJ = -JI$ et de même pour IK, KJ. Ainsi ce groupe possède huit éléments donnés par

$$Id, -Id, I, J, K, -I, -J, -K,$$

Ainsi tous les éléments sont d'ordre quatre.

2. On a déja vu que $IJ = K$ et $JI = -K$, donc le groupe n'est pas abélien.
3. (a) Il est clair que $-Id$ est aussi dans $Z(G)$.

   (b) La table de la loi du groupe permet de voir que l'on a

$$Z(G) = \{Id, -Id\}$$

4. Si un sous groupe contient I, alors il contient $-Id = I^2$ et $-I$. Le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est donc un sous groupe qui est bien distingué car d'indice deux. Si un sous groupe contient I et J, alors il contient K et il est égal à tout le groupe.

Exercice 5

1. Question déja traitée en td. Dans ce cas via la question $3-b$ de l'exercice 2 le groupe est isomorphe à

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2. (a) G ne peut contenir un élément d'ordre huit sinon il est abélien. Il ne peut contenir que des éléments d'ordre deux, donc il contient un élément d'ordre quatre.

(b) Le quotient de G par H est de cardinal deux, donc H est distingué par un argument classique.

(c) On obtient que G est un produit semi-direct entre H et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet l'hypothèse permet de construire une application de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans H qui est une section de la projection de G/H dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On retrouve donc le groupe diédral de l'exercice 3.

(d) Dans ce cas on retrouve le groupe de l'exercice 4 via un petit raisonnement laissé au lecteur ...