Master 1 – Mathématiques & Applications
Algèbre & Géométrie

TD4 : GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Dans tout ce qui suit E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps k .

Exercice 1. Montrer que $f, g \in \text{GL}(E)$ vérifient $P(f) = P(g)$ ssi il existe $\lambda \in k^*$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 2. On suppose $n \geq 2$. Soit $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{P}(E)$ des points distincts tels que les droites projectives (a_1a_2) , (b_1b_2) et (c_1c_2) soient concourantes en un point $o \in \mathbb{P}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z \in E$ des antécédents par $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ de, respectivement, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, o \in \mathbb{P}(E)$ tels que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = z$.
2. Montrer que $\pi(u_1 - v_1) \in (a_1b_1) \cap (a_2b_2)$, $\pi(v_1 - w_1) \in (b_1c_1) \cap (b_2c_2)$ et $\pi(w_1 - u_1) \in (c_1a_1) \cap (c_2a_2)$.
3. Montrer une implication du théorème de Désargues.

Exercice 3. On suppose que $\mathbb{P}$ est un plan projectif. Pour toutes droites projectives distinctes $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{P}$ et tout point $s \in \mathbb{P} \setminus (\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2)$, on définit la *perspective de centre s (entre $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$)* comme l'application $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s} : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$ qui à $x \in \mathbb{D}_1$ associe l'intersection de $\mathbb{D}_2$ avec (sx) .

1. (a) Montrer que toute perspective entre $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ est une homographie fixant l'intersection de $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$.
(b) Montrer que toute homographie entre deux droites projectives de $\mathbb{P}$ fixant leur intersection est une perspective.
2. Soit $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{P}$ des points distincts tels que les droites projectives (a_1a_2) , (b_1b_2) et (c_1c_2) soient concourantes en un point $o \in \mathbb{P}$. On note

$$a_0 := (b_1c_1) \cap (b_2c_2) \quad b_0 := (c_1a_1) \cap (c_2a_2) \quad c_0 := (a_1b_1) \cap (a_2b_2).$$

- (a) Montrer que $f_{(a_1a_2), (c_1c_2), b_0}$ est la composée des perspectives $f_{(a_1a_2), (b_1b_2), c_0}$ et $f_{(b_1b_2), (c_1c_2), a_0}$.
- (b) On note $m := (a_1a_2) \cap (b_0c_0)$. Montrer que $f_{(a_1a_2), (c_1c_2), b_0}(m)$ est sur (a_0c_0) .
- (c) En déduire une implication du théorème de Désargues (la même que dans l'exercice précédent).
3. Soit $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}$ une perspective. Montrer qu'il existe une droite $\mathbb{D}$ concourante à $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ telle que, pour tous points $a \neq b \in \mathbb{D}_1$, les droites $(af_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}(b))$ et $(bf_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}(a))$ se coupent en un point de $\mathbb{D}$. La droite $\mathbb{D}$ est appelée *axe de $f_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, s}$* .
4. Soit $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ deux droites distinctes de $\mathbb{P}$ se coupant en un point o . Soit $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$ une homographie qui ne fixe pas o . Montrer que, pour tous points $a \neq b \in \mathbb{D}_1$, les droites $(af(b))$ et $(bf(a))$ se coupent en un point de $(f(o)f^{-1}(o))$. La droite $(f(o)f^{-1}(o))$ est appelée *axe de f* .
5. Montrer que toute homographie entre deux droites de $\mathbb{P}$ s'écrit comme composé de deux perspectives.
6. A l'aide de l'axe d'une homographie, montrer le théorème de Pappus.

Exercice 4.

1. (a) Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif. Soit $D_1, D_2 \subset \mathbb{P}$ deux droites distinctes, $x_0 \in \mathbb{P} \setminus (D_1 \cup D_2)$ un point, $p \in \Delta \subset \mathbb{P}$ un point sur une droite en position générale par rapport aux données précédentes, et $a_1, b_1 \in D_1$ deux points en positions générales par rapport aux données précédentes. On note $a_2 := (pa_1) \cap D_2$, $b_2 := (pb_1) \cap D_2$, $c_1 := (x_0a_1) \cap \Delta$, $c_2 := (x_0a_2) \cap \Delta$ et $x_1 := (c_1b_1) \cap (c_2b_2)$. Montrer que x_0, x_1 et $D_1 \cap D_2$ sont alignés.
(b) (problème de la feuille trop petite) Sur une feuille sont tracées deux droites se coupant en dehors de la feuille et un point hors de ces deux droites. On souhaite tracer (l'intersection de la feuille avec) la droite passant par ce point et l'intersection des deux droites. Comment faire cela sans écrire sur la table.
2. (a) Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ deux points distincts, $p, a_1 \in \mathbb{P}$ deux points distincts en position générale par rapport aux données précédentes, $b_1 \in (x_1a_1)$ et $a_2 \in (pa_1)$ deux points en position générale par rapport aux données précédente, et $c_1 \in (x_2b_1)$ un point également

en position générale par rapport aux données précédente. On note $b_2 := (pb_1) \cap (x_1a_2)$, $c_2 := (pc_1) \cap (x_2b_2)$ et $x_3 := (a_1c_1) \cap (a_2c_2)$. Montrer que x_1 , x_2 et x_3 sont alignés.

- (b) (problème de la règle trop courte) Comment tracer (une portion de longueur non nulle de) la droite passant par deux points avec une règle trop petite pour rejoindre ces deux points.

Exercice 5. On rappelle que E^* dénote l'espace dual de E , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires de E vers k .

1. Montrer que deux formes linéaires non nulles $f, g \in E^* \setminus \{0\}$ ont même noyau ssi elles sont colinéaires, c'est-à-dire ssi $P(f) = P(g)$.
2. On note $\mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ l'espace des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(E)$, et on dit que $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$ sont *concourants* si $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ est un sous-espace projectif de codimension au plus 2.
 - (a) Si $\mathbb{P}(E)$ est un plan projectif, à quoi correspond trois hyperplans concourants? Même question si $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 3.
 - (b) Montrer que

$$\kappa : \begin{array}{ll} \mathbb{P}(E^*) & \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{P}(E)) \\ k.f & \mapsto \pi(\text{Ker}(f)) \end{array}$$

où π dénote la projection canonique de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}(E)$, est bijective.

- (c) Montrer que trois points $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}(E^*)$ sont alignés ssi $\kappa(x_1), \kappa(x_2), \kappa(x_3)$ sont concourants.
3. (a) Montrer que l'application

$$\psi : \begin{array}{ll} E & \rightarrow (E^*)^* \\ x & \mapsto (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

- (b) En déduire une identification entre $\mathbb{P}(E)$ et $\mathcal{H}(\mathbb{P}(E^*))$ qui échange les notions d'alignement et de concurrence.
4. On suppose maintenant que $\mathbb{P}(E)$ est un plan projectif. Pour toute droite projective $D \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E))$, on note $D^* := \kappa^{-1}(D)$ le point de $\mathbb{P}(E^*)$ associé, et pour tout point $x \in \mathbb{P}(E)$, on note $x^* := \kappa(P(\psi)(x))$ la droite projective de $\mathbb{P}(E^*)$ associée. Montrer que l'on a la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ll} D = (x_1x_2) \text{ dans } \mathbb{P}(E) & \iff D^* = x_1^* \cap x_2^* \text{ dans } \mathbb{P}(E) ; \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}(E) \text{ alignés} & \iff x_1^*, x_2^*, x_3^* \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E^*)) \text{ concourants} ; \\ D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(E^*)) \text{ concourants} & \iff D_1^*, D_2^*, D_3^* \in \mathbb{P}(E) \text{ alignés.} \end{array}$$

C'est ce qu'on appelle le *principê de dualité*.

5. Montrer que les deux implications du théorème de Désargues sont duales l'une de l'autre.
6. Enoncer la proposition duale du théorème de Pappus.

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$ dirigé par un espace vectoriel E . On appelle *champ de vecteur* toute application de $\mathcal{E}$ dans E . On dit qu'un champ de vecteur est *radial* s'il est de la forme

$$r_{o,\lambda} : \begin{array}{ll} \mathcal{E} & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda \vec{o\hat{x}} \end{array},$$

avec $o \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On note $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs radiaux et $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs constants.

1. Montrer que la structure vectoriel de E induit naturellement une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des champs de vecteurs, que $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel isomorphe à E , et que $\widehat{\mathcal{E}} := \mathcal{R}(\mathcal{E}) \cup \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$.
2. Montrer que l'application $f : \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(r_{o,\lambda}) = \lambda$ et $f|_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} \equiv 0$ est une forme linéaire.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $\varphi(r_{o,\lambda}) = o$ induit une isomorphisme d'espace affine entre $\mathcal{E}$ et $f^{-1}(1)$.
4. Donner une complétion projective "canonique" de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire ne nécessitant pas le choix d'une origine arbitraire pour $\mathcal{E}$.

Exercice 7.

1. Montrer que l'application qui envoie $\lambda \in k$ sur $\text{Vect}((\lambda, 1))$ et ∞ sur $\text{Vect}((1, 0))$ permet d'identifier $\mathbb{P}^1(k)$ à $k \sqcup \{\infty\}$.
2. Montrer que l'action naturelle de $\text{GL}_2(k)$ sur k^2 induit une action de ce même groupe sur $\mathbb{P}^1(k)$, et en déduire une action fidèle de $\text{PGL}_2(k)$ sur $\mathbb{P}^1(k)$.
3. Montrer que cette action, vue sur $k \sqcup \{\infty\}$, se traduit par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{cases} \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d} & \text{si } \lambda \in k \text{ et } c\lambda + d \neq 0 \\ \frac{a}{c} & \text{si } \lambda = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Montrer que, si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont deux triplets d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{P}^1(k)$, il existe une unique homographie f de $\mathbb{P}^1(k)$ telle que $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$ et $f(c_1) = c_2$.

Exercice 8. On suppose dans cet exercice que $n \neq 3$, le but est de montrer que $\text{PSL}(E)$ est simple. On fixe pour cela $N \triangleleft \text{PSL}(E)$ avec $N \neq \{0\}$.

1. Montrer que $\tilde{N} := \pi^{-1}(N)$, où $\pi : \text{SL}(E) \rightarrow \text{PSL}(E)$ est la surjection canonique, est un sous-groupe distingué de $\text{SL}(E)$ contenant $Z(\text{SL}(E))$.
2. Montrer qu'il existe $f \in \tilde{N}$ et $x_0 \in E$ tels que x_0 et $f(x_0)$ ne soient pas colinéaires.
3. Soit t une transvection de droite $k.x_0$. Montrer que ftf^{-1} est une transvection distincte de t dont on précisera la droite, et que $v := ftf^{-1}t^{-1}$ est un élément non trivial de $\tilde{N}$.
4. En notant $t = \text{Id}_E + \varphi.x_0$, montrer que, pour tout $x \in E$, on a

$$v(x) = x - \varphi(t^{-1}(x)).x_0 + \varphi(f^{-1}t^{-1}(x)).f(x_0).$$

5. En déduire que v laisse globalement invariant tout hyperplan contenant x_0 et $f(x_0)$. On note $H \subset E$ un tel hyperplan.
6. On suppose dans cette question qu'il existe une transvection t d'hyperplan H qui ne commute pas avec v . Montrer alors que vtv^{-1} est une transvection d'hyperplan H et que $vtv^{-1}t^{-1}$ est une transvection dans $\tilde{N}$.
7. On suppose dans cette question que v commute avec toutes les transvections d'hyperplan H .
 - (a) A l'aide d'une transvection de droite x , montrer que $v(x) = x$ pour tout $x \in H$.
 - (b) En déduire que v est une transvection.
8. Conclusion.

Exercice 9. On suppose dans cet exercice que $n \geq 2$. Le but est de montrer que tous les sous-groupe distingués stricts de $\text{SL}(E)$ sont contenu dans son centre. On fixe donc $G \triangleleft \text{SL}(E)$ distinct de $\text{SL}(E)$.

1. Montrer que l'image de G par la projection canonique π dans $\text{PSL}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\text{PSL}(E)$.
2. Montrer que, si $\pi(G) = \text{PSL}(E)$ alors G contient un élément de la forme

$$\lambda \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & \text{Id} & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

avec λ une puissance $(n+1)$ -ième de l'unité dans k .

3. Conclure lorsque k est de caractéristique non nulle.
4. Conclure lorsque k est un corps fini.

Exercice 10. On rappelle que l'action d'un groupe G sur un ensemble X est dite k -transitive, avec $k \in \mathbb{N}^*$, si pour tous k -uplets $(x_1, \dots, x_k), (x'_1, \dots, x'_k) \in X^k$ d'éléments distincts, il existe $g \in G$ tel que $g.x_i = x'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$ agit fidèlement et 3-transitivement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$.
(b) En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ agit fidèlement et 4-transitivement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$.
(b) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathcal{A}_4$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_4)$.
(b) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathcal{A}_5$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.
(b) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathcal{A}_5$.