Master 1 – Mathématiques & Applications
Algèbre & Géométrie

TD5 : GROUPES ORTHOGONAUX

Dans tout ce qui suit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\| \cdot \|_E$ la norme associée.

Exercice 1.

1. Montrer qu'une application $f : E \rightarrow E$ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi elle préserve $\| \cdot \|_E$.
2. Montrer que si une application $f : E \rightarrow E$ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors $f \in \text{GL}(E)$ et $\det(f) \in \{\pm 1\}$.

On appelle *isométrie vectorielle* de E toute application $f : E \rightarrow E$ préservant $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

3. Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

On note $\text{SO}(E) := O(E) \cap \text{SL}(E)$.

Exercice 2. Pour tout $X \subset E$, on note $X^\perp := \{u \in E \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in X\}$.

1. Montrer que pour tout $X \subset E$, $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, on a $F \oplus F^\perp = E$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
3. Soit $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si $F_1 \subset F_2$, alors $F_2^\perp \subset F_1^\perp$; et montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$, ainsi que $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.
4. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par $f \in O(E)$, alors $F^\perp$ est également stable par f .

Exercice 3. On rappelle qu'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite *orthonormée* si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E .
2. Montrer que $f \in \text{GL}(E)$ est une isométrie vectorielle ssi sa matrice A dans une base orthonormée vérifie ${}^t A \cdot A = \text{Id}_n$.
3. Montrer que $O(E)$ est isomorphe à $O(n) := \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = \text{Id}_n\}$, et que $\text{SO}(E)$ est isomorphe à $\text{SO}(n) := O(n) \cap \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Pour tout hyperplan $H \subset E$, on appelle *réflexion orthogonale* par rapport à H l'application $r_H : E \rightarrow E$ définie, pour tout $u \in E$, par $r_H(u) = u_H - u'_H$ où $u_H + u'_H$ est l'unique décomposition de u avec $u_H \in H$ et $u'_H \in H^\perp$.

Pour tout sous-espace vectoriel $H \subset E$ de codimension 2, on appelle *renversement orthogonale* par rapport à H l'application $r_H : E \rightarrow E$ définie, pour tout $u \in E$, par $r_H(u) = u_H - u'_H$ où $u_H + u'_H$ est l'unique décomposition de u avec $u_H \in H$ et $u'_H \in H^\perp$.

1. Soit $f \in O(E) \setminus \{\text{Id}_E\}$ fixant un hyperplan, montrer que f est une réflexion orthogonale.
2. Montrer que toute réflexion orthogonale est dans $O(E)$.
3. Montrer que, pour tout $u_1 \neq u_2 \in E \setminus \{0\}$ tels que $\|u_1\|_E = \|u_2\|_E$, il existe une réflexion envoyant u_1 sur u_2 .
4. Soit $H \subset E$ un hyperplan, et $f : H \rightarrow H$ une réflexion orthogonale (pour H). Montrer qu'il existe une réflexion orthogonale (pour E) $\tilde{f} : E \rightarrow E$ telle que $\tilde{f}|_H = f$.
5. Montrer que les réflexions orthogonales engendrent $O(E)$.
6. (a) En dimension 3, montrer que si f est une réflexion orthogonale, alors $-f$ est un renversement orthogonal.
(b) En déduire que, si $n = 3$, $\text{SO}(E)$ est engendré par les renversements orthogonaux.
(c) Montrer que, si $n \geq 3$, les renversements orthogonaux engendrent $\text{SO}(E)$.

- i. Montrer que $r_n^n = s^2 = sr_n sr_n = \text{Id}_E$.
 - ii. Montrer que, pour tout $f \in D_{2n}$, il existe d'unique $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $f = s^\varepsilon r_n^k$.
 - (d) Montrer que $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ définie par $\varphi(\varepsilon) := (-1)^\varepsilon \text{Id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 - (e) En déduire que $|D_{2n}| = 2n$.
2. Soit $G \subset O(2)$ un sous-groupe fini.
- (a) Montrer que si $G \subset \text{SO}(2)$, alors G est cyclique.
 - (b) Montrer que si $G \not\subset \text{SO}(2)$, alors G est diédral.

Exercice 10. On munit $\text{GL}_3(\mathbb{R})$, et donc $\text{SO}(3)$, de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^9$. Le but de l'exercice est de montrer que $\text{SO}(3)$ est simple. Pour ce faire, on fixe $H \triangleleft \text{SO}(3)$ et on suppose que H contient un élément h non trivial.

1. (a) Montrer que $\text{SO}(3)$ est un fermé borné.
- (b) Montrer que $\text{SO}(3)$ est connexe par arc, c'est-à-dire que pour tout $f_1, f_2 \in \text{SO}(3)$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)$ tel que $\gamma(0) = f_1$ et $\gamma(1) = f_2$.
- (c) En déduire que $\text{SO}(3)$ un compact connexe
2. (a) Montrer que la composition dans $\text{SO}(3)$, ainsi que l'application $\text{tr} : \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}$, qui envoie une matrice sur sa trace, sont continues.
- (b) Montrer que, pour tout $f \in \text{SO}(3)$, $\text{tr}(f)$ est de la forme $1 + 2 \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\theta = 0$ ssi $f = \text{Id}_E$.
- (c) En déduire que l'image de l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \text{SO}(3) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \text{tr}(fhf^{-1}h^{-1}) \end{array}$$

est un intervalle de la forme $[a, 3]$ avec $a < 3$.

3. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 + 2 \cos(\frac{\pi}{n_0}) > a$. On fixe $f_0 \in \text{SO}(3)$ tel que $\psi(f_0) = 1 + 2 \cos(\frac{\pi}{n_0})$ et on pose $h_0 := f_0 h f_0^{-1} h^{-1}$.
 - (a) Montrer que $h_0 \in H$.
 - (b) Montrer que $h_0^{n_0}$ est une réflexion orthogonale.
4. Conclure.