Exercice 1 Déterminer à isomorphisme près tous les corps de cardinal 4.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Montrer qu'il y a $\frac{p(p-1)}{2}$ polynômes irréductibles de degré deux dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $X^2 - 3X + a = 0$ en fonction de a .

Exercice 4 Montrer que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_5$.

Trouver les polynômes irréductibles de degré inférieur ou égal à 4 sur $\mathbb{F}_2$.

Exercice 5 Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et $f : x \mapsto x^k$.

Trouver des conditions pour que ce soit une bijection.

Exercice 6 Donner une description des éléments du groupe des inversibles de $\mathbb{F}_9$.

Exercice 7 On considère des corps à 16 éléments.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ est isomorphe à un tel corps.
2. Montrer que $\mathbb{Z}_2[X]/(X^4 + X^3 + 1)$ est isomorphe à un tel corps.
3. Trouver le groupe des inversibles de chacun de ces corps en fonction de la classe de X .
4. Trouver les isomorphismes entre ces deux corps.

Exercice 8 Le but est de montrer que -1 est un carré de $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$. Soit F^2 l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}_p^*$ qui s'écrivent comme carré d'un élément.

1. Montrer que $x \in F^2 \iff x^{(p-1)/2} = 1$:
 - (a) Considérer $x \mapsto x^2$. Montrer que c'est un morphisme et calculer son noyau.
 - (b) Conclure par un argument de cardinalité.
2. En déduire le résultat.

Exercice 9 Le but est de montrer que Φ_8 est réductible dans tout corps fini.

1. Donner la décomposition de Φ_8 dans $\mathbb{F}_2$.

2. Donner la décomposition de Φ_8 dans $\mathbb{F}_3$.
3. Écrire toutes les décompositions possibles de Φ_8 comme produit de deux polynômes de degré deux sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer que pour tout nombre premier $p \geq 3$ si x est racine de Φ_8 dans $\mathbb{F}_p$ alors x est racine de $X^8 - 1$.
5. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_{p^2}^*$ contient toujours un élément d'ordre 8. On admettra que ce groupe est cyclique. En déduire que Φ_8 admet une racine sur $\mathbb{F}_{p^2}$.
6. Déduire que Φ_8 est réductible dans $\mathbb{F}_p$ en utilisant un exercice précédent.