Aix–Marseille Université 2018-2019

Mathématiques – M1

TDS 8 : THÉORIE DE GALOIS

1 Cercles et droites

Exercice 1 Montrer que l'on peut construire un carré d'aire $2a^2$ connaissant un carré d'aire a^2.

Exercice 2 Montrer que l'on peut diviser un angle en deux parties égales à la règle et au compas.

Exercice 3 Montrer que l'on peut diviser un segment en n parties égales à la règle et au compas.

Exercice 4 Etant donné un cercle, montrer que l'on ne peut construire un carré de même aire que le disque.

Exercice 5 Construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

2 Galois

Exercice 6 Déterminer les corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^4 + 1, X^4 - 2$.

Exercice 7 Soit $a = (1 - \sqrt{2})^{1/3}$. Montrer que a est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et exprimer $\frac{1}{a^2+1}$.

Exercice 8 Soit a une racine complexe de $X^2 + 2X + 5$. Exprimer $\frac{a^3+a+2}{a^2-1}$ en fonction de a.

Exercice 9 On considère $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

1. Montrer que K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.
2. Trouver le cardinal du groupe de Galois et montrer qu'il possède deux éléments d'ordre deux.
3. En déduire le groupe de Galois et trouver les extensions intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et K.

Exercice 10

1. Montrer que toute extension de $\mathbb{Q}$ de degré deux est galoisienne.
2. Soit ω_n une racine n-ème primitive de l'unité. Montrer que $\mathbb{Q}(\omega_n)$ est galoisienne.
3. Montrer que si $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, alors $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{5}}]$ est galoisienne sur K mais pas sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 11 Soit $\alpha = 2^{1/3}$ et $K = \mathbb{Q}[j, \alpha]$ le corps de décomposition de $X^3 - 2$.

1. Montrer que K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et déterminer le cardinal du groupe de Galois.
2. Montrer que l'on peut trouver deux éléments f, g du groupe de Galois en définissant.
$$f(\alpha) = \alpha f(j) = j^2, g(\alpha) = j\alpha, g(j) = j$$
3. Montrer que $g^2 = f^{-1}gf$. En déduire le groupe de Galois.
4. Trouver les extensions intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et K.

Exercice 12 Soit $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Montrer que $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$
2. Calculer le polynôme minimal de z sur $\mathbb{Q}$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}(z)$ est une extension galoisienne. Trouver son degré.
4. Montrer que
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(z) & \to & \mathbb{Q}(z) \\ a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 & \to & a + bz^2 + cz^4 + dz + ez^3 \end{array}$$
est un $\mathbb{Q}$ automorphisme de $\mathbb{Q}(z)$.
5. Calculer le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(z)$.
6. En déduire un corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(z)$.

.

Exercice 13 On considère le polynôme cyclotomique Φ_n et ω_n une racine n-ème primitive de l'unité.

Montrer que le corps de décomposition de Φ_n est égal à $\mathbb{Q}(\omega_n)$. En déduire que le groupe de Galois de Φ_n est le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.