Faculté des Sciences et Techniques

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

Mathématique 1

cours et exercices résolus

Portail Marie Curie - Physique Chimie SPI

2018

Table de matières

Cours 1. Les vecteurs dans le plan et l'espace à trois dimensions

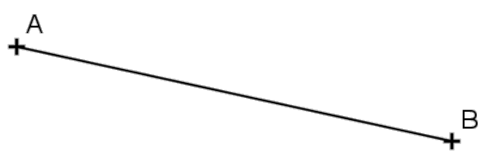
Ce premier chapitre du cours de mathématiques est dédié à l'étude des vecteurs dans le contexte géométrique du plan et de l'espace à trois dimensions. Leur importance dans la modélisation des systèmes physiques, et donc dans la compréhension de leur fonctionnement, justifie l'attention portée à ce cas particulier d'espace vectoriel.

On suppose que le lecteur connait le géométrie élémentaire, les notions de distance entre deux points et de valeur des angles, ainsi que les propriétés standard des figures géométriques étudiées au collège et au lycée.

1. Définition géométrique d'un vecteur

Il existe plusieurs manières de définir géométriquement la notion de vecteur. Toutes ces manières sont équivalentes ; on parle ainsi dans la littérature mathématique de vecteurs libres, de vecteurs liés, ou encore de vecteurs glissants ; dans tous ces cas, il s'agit de la même notion, définie différemment.

1.1. **Analyse géométrique des segments.** Le point de depart pour définir la notion de vecteur est l'étude des segments du plan ou de l'espace à trois dimensions. Un segment c'est une partie d'une droite, comprise entre un point A, qui sera appelé *l'origine du segment*, et un point B, qui sera *l'extrémité du segment.*



Le segment qui va de A à B sera noté par le symbole $[AB]$. Si l'origine et l'extrémité du segment sont confondus ($A = B$), on obtient un segment nul, noté $[AA]$ (ou $[BB]$).

- *Segments ayant la même direction* : Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments de longueur non-nulle. On dit que $[AB]$ et $[CD]$ ont la même *direction* si les droites qui les portent sont parallèles ou confondues.

Cette définition ne peut s'appliquer au segment nul, qui n'est porté par aucune droite. Par convention, on dit qu'un segment nul a la même direction que tous les autres segments : $[AA]$ et $[BC]$ ont la même direction, pour tous les points A, B et C.

- *Segments ayant le même sens.* Si deux segments n'ont pas la même direction on ne peut pas poser la question : "est-ce que ces deux segments ont le même sens ou non ?" - car *avoir le même sens* est une propriété réservée aux segments qui ont déjà la même direction.

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments non-nuls ayant la même direction. Il existe deux cas : le cas a), quand les deux segments $[AB]$ et $[CD]$ peuvent être sur une même droite, et le cas b), quand les deux segments sont sur deux droites parallèles.

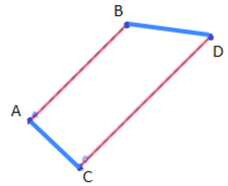
Cas a) : les deux segments sont placés sur la même droite. Il est facile de voir si $[AB]$ et $[CD]$ ont le même sens ou non, en regardant l'ordre dans lequel les quatre points A, B, C, et D, sont placés sur la droite qui les contient.

Les deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont le même sens si et seulement si on est dans un de ces deux cas :
- l'origine d'un segment et l'extrémité de l'autre (donc A et D ou B et D) sont les points le plus à droite et le plus à gauche
- les deux origines et les deux extrémités se suivent (autrement dit, les deux segments $[AC]$ et $[BD]$, reliant les deux extrémités et les deux origines, n'ont aucun point intérieur en commun).

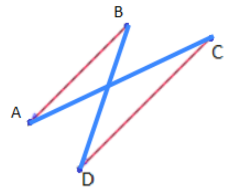
Cas b) : les deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ne sont pas sur la même droite. Dans cette situation, on regarde les segments $[AC]$ et $[BD]$

(reliant les origines des segments, respectivement les extrémités des segments).

Les deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont le même signe si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ne se croisent pas, comme illustré dans la figure suivante :



Bien sûr, si les segments $[AC]$ et $[BD]$ se croisent, c'est-à-dire si nous sommes dans le cas de la figure suivante :



on dit que les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont des sens contraires.

Cette definition ne peut s'appliquer aux segments nuls, car le segment reliant les origines et le segment reliant les extrémités auront toujours un point en commun, et donc on il résulterait qu'un segment nul n'est jamais du même sens avec un autre segment. Par convention, on dit qu'un segment nul a le même sens que tous les autres segments (on savait déjà qu'il avait la même direction que tous les autres segments).

Risque d'erreurs :

En français, les mots *direction* et *sens* sont synonymes : on dit bien "le sens dans lequel se développe notre société" ou "la direction dans laquelle se développe notre société", et ça veut dire la même chose.

Dans le cas de l'analyse géométrique des segments, les deux propriétés *avoir la même direction*, et *avoir le même sens*, ont des significations différentes.

- *Longueur d'un segment* : La longueur d'un segment est la distance qui sépare son origine de son extrémité. Par conséquent, la longueur d'un segment est un nombre réel positif ou nul ; la longueur du segment nul est égale à zéro, et les longueurs des segments $[AB]$ et $[BA]$ sont égales.

Question 1. *Soit dans le plan le segment $[AB]$ de longueur 1.*

Quelle est la figure géométrique formée par les extrémités P des segments $[AP]$ qui ont la même origine A et la même direction que $[AB]$?

Quelle est la figure géométrique formée par les extrémités P des segments $[AP]$ qui ont la même origine, la même direction et le même sens que $[AB]$?

Quelle est la figure géométrique formée par les extrémités P des segments $[AP]$ qui ont la même origine et la même longueur que $[AB]$?

Question 2. *Soit $[AB]$ et $[AC]$, deux segments non-nuls ayant la même direction et le même sens. On sait que la longueur de $[AB]$ est strictement plus petite que la longueur de $[AC]$.*

Lequel des trois points A, B et C, se situe entre les deux autres ?

1.2. **Définition de la notion de vecteur.** Soit un segment donné $[AB]$; pour chaque point C fixé, il existe exactement un segment $[CD]$ qui a la même direction, le même sens et la même longueur que $[AB]$, et qui a le point C comme origine (il suffit de construire le parallélogramme qui a A, B et C comme sommets).

Pour un segment donné $[AB]$, il existe donc une infinité de segments qui ont la même direction, le même sens et la même longueur que $[AB]$. Ces segments ont beaucoup de propriétés géométriques en commun ; on voit qu'il n'y a que l'origine qui soit différente d'un tel segment à un autre.

Cet ensemble infini de segments - tous très semblables au segments $[AB]$ - s'appelle un *vecteur*, et se note $\overrightarrow{AB}$. En conclusion,

Definition d'un vecteur :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble de tous les segments parallèles, de même sens, et de la même longueur que le segment $[AB]$.

Le segment $[AB]$, comme tout autre segment $[CD]$ ayant la même direction, le même sens et la même longueur que $[AB]$, sont appelés *représentants* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur a donc une infinité de représentants, à savoir tous les segments qui le constituent. Pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ et tout point C, il y a exactement un représentant de $\overrightarrow{AB}$ qui a son origine en C (donc un segment de la forme $[CD]$).

À chaque fois qu'il faut travailler avec un vecteur, on utilisera l'un ou l'autre de ses représentants, qu'on pourra en général choisir afin de simplifier les calculs.

Question 3. *Laquelle des propositions suivantes est vraie ?*

1) Tous les vecteurs sont des segments.

2) Ils existent des segments qui ne sont pas des vecteurs.

3) Tout segment fait partie d'un vecteur.

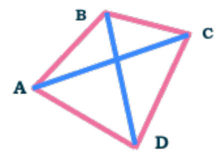
Notations

Si on connait un des représentants, disons $[AB]$ d'un vecteur, alors on préférera d'utiliser pour le vecteur la notation $\overrightarrow{AB}$; si, en revanche, on ne connait pas de représentant, on notera le vecteur avec des lettres surmontées d'une flèche : $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F}$, etc.

Si l'un des représentants d'un vecteur est un segment nul, donc de forme $[AA]$ ou $[BB]$, alors le vecteur s'appelle le *vecteur nul*; ce vecteur sera noté le plus souvent $\overrightarrow{0}$, même si on peut utiliser aussi les notations $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$.

L'ensemble de tous les vecteurs du plan sera noté V_2 ; celui des vecteurs de l'espace à trois dimensions sera noté V_3. Quand on énonce un résultat qui s'applique aussi bien à l'espace V_2 qu'à V_3, on utilisera la notation V.

Question 4. *Considérons quatre points différents deux à deux, tels que le quadrilatère $ABCD$ soit convexe (c'est-à-dire que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se croisent).*



Combien de segments non-nuls différents peut-on former ayant comme origine et extrémité deux des points A, B, C et D ?

Combien de vecteurs non-nuls différents ont des représentants parmi ces segments ? (attention : il a deux réponses possibles, en fonction des propriétés géométriques du quadrilatère $ABCD$)

1.3. **Direction, sens, norme.** On dit que deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ont la *même direction* si n'importe lequel des représentants de $\overrightarrow{v_1}$ a la même direction que n'importe lequel des représentants de $\overrightarrow{v_2}$.

On dit que deux vecteurs non-nuls qui ont la même direction, ont le même sens, si n'importe lequel des représentants de $\overrightarrow{v_1}$ a le même sens que n'importe lequel des représentants de $\overrightarrow{v_2}$.

La norme d'un vecteur est la longueur de n'importe lequel de ses représentants.

En particulier, le vecteur nul a la même direction et le même sens que tout autre vecteur ; sa norme est égale à 0.

Le théorème suivant prouve qu'un vecteur est complètement défini par sa direction, son sens et sa norme.

Théorème 1. *Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, deux vecteurs ayant la même direction, le même sens et la même norme. Alors $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$.*

Preuve du Théorème : Par définition, les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux ensembles de segments.

La technique pour prouver - en général - que deux ensembles sont égaux, c'est de montrer que tout élément d'un des deux ensembles est aussi un élément de l'autre ensemble.

Prenons donc $[AB]$ un élément de $\overrightarrow{v_1}$ (donc un segment qui représente le vecteur $\overrightarrow{v_1}$), et $[CD]$ un élément de $\overrightarrow{v_2}$. Notre objectif est de prouver que, dans cette situation, $[AB]$ est aussi un représentant de $\overrightarrow{v_2}$ et que $[CD]$ est aussi un représentant de $\overrightarrow{v_1}$.

Mais les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ont la même direction, le même sens et la même norme. Alors, les segments $[AB]$ et $[CD]$, en tant que représentants de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, ont, eux aussi, la même direction, le même sens et la même norme.

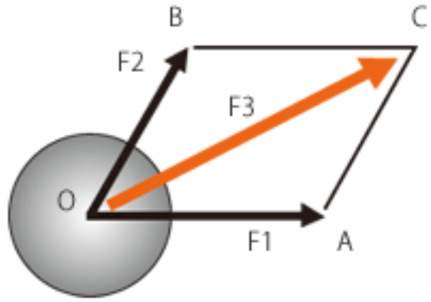
Par conséquent, ces deux segments font partie du même vecteur. Parce que $[AB]$ appartient à $\overrightarrow{v_1}$, et $[AB]$ et $[CD]$ sont deux segments du même vecteur, il résulte que $[CD]$ appartient, lui aussi, à $\overrightarrow{v_1}$. De la même manière, parce que $[CD]$ appartient à $\overrightarrow{v_2}$, on en déduit que $[AB]$ doit lui aussi appartenir à $\overrightarrow{v_2}$.

Nous avons ainsi prouvé que tout représentant $[AB]$ de $\overrightarrow{v_1}$ est aussi un représentant de $\overrightarrow{v_2}$, tandis que tout représentant $[CD]$ de $\overrightarrow{v_2}$ est aussi un représentant de $\overrightarrow{v_1}$. Par conséquent, les deux vecteurs coïncident. □

2. Addition et multiplication avec des nombres réels

2.1. La somme de deux vecteurs : règle de Chasles.

Problème physique : Considérons deux forces F_1 et F_2 qui agissent en même temps et au même point 0 d'un objet.



La force F_1 sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{0A}$; le vecteur $\overrightarrow{0B}$ représentera la force F_2.

Un problème central en physique est de trouver une troisième force, F_3, qui va avoir sur l'objet le même effet qu'ont ensemble les forces F_1 et F_2 (on cherche donc une troisième force qui fait se déplacer l'objet exactement comme il le ferait sous l'effet combiné des forces F_1 et F_2).

Cette force, appliquée au même point 0, est appelée la résultante - ou la somme - de F_1 et F_2, et est désignée sur ce schéma par le vecteur $\overrightarrow{0C}$.

Ce problème a beaucoup été étudié depuis l'antiquité, mais ce n'est qu'au dix-septième siècle que la réponse complète a été donnée. C'est le mathématicien français Pierre de Fermat, qui a, le premier, énoncé vers 1630, de manière claire la règle du parallélogramme, d'après laquelle on peut trouver la somme de deux forces.

Dans ce cours nous allons présenter l'addition de deux vecteurs non pas en utilisant la règle du parallélogramme, mais sous la forme équivalente de la relation de Chasles.

Definition de la somme des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$:

Soit $[AB]$ un représentant quelconque de $\overrightarrow{v_1}$.

On considère $[BC]$, le seul représentant de $\overrightarrow{v_2}$ dont

$\boxed{\text{l'origine est } B\text{. Alors, le segment } [AC] \text{ est un des}}$

$\boxed{\text{représentants du vecteur } \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\text{. En d'autres mots,}}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.}$$

Risque d'erreurs :
La somme de deux vecteurs est un autre vecteur, et non pas un nombre ; chercher à tout prix un nombre comme réponse à la question "quelle est la somme de deux vecteurs" n'a pas de sens.

Cette définition pose d'emblée un problème : elle dépend du choix de $[AB]$, le représentant du vecteur $\overrightarrow{v_1}$. Il faut donc prouver que, si on fait ce même calcul à partir de $[MN]$, un autre représentant de $\overrightarrow{v_1}$, on obtient à la fin le même vecteur $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$; on doit donc montrer que la somme de deux vecteurs ne depend pas des représentants choisis pour la calculer.

Théorème 2. *La definition de l'addition de deux vecteurs est cohérente. De plus,*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{v} \in V.$$

Preuve du Théorème : Soit $[AB]$ et $[MN]$ deux représentants du vecteur $\overrightarrow{v_1}$. D'après la définition de la somme de deux vecteurs, on considère $[BC]$ et $[NP]$ les uniques représentants du vecteur $\overrightarrow{v_2}$ ayant comme origine les points B et N. Notre objectif est de prouver que les segments $[AC]$ et $[MP]$ font partie d'un même vecteur, qui sera alors la somme de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Prenons d'abord le cas où le deuxième vecteur est nul, à savoir $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. Dans ce cas, $B = C$ et $N = P$, donc $[AC] = [AB]$ et $[MP] = [MN]$. Mais on sait que $[AB]$ et $[MN]$ sont deux représentants du vecteur $\overrightarrow{v_1}$, et alors les segments $[AC]$ et $[MP]$ font partie d'un même vecteur, à savoir $\overrightarrow{v_1}$.

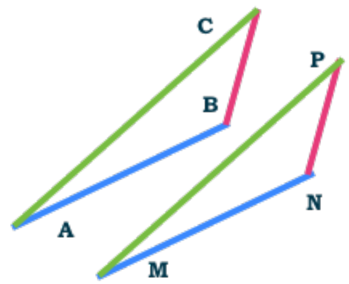
On a ainsi prouvé que, si $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$, alors l'addition entre $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est correctement définie, et, de plus, que son résultat est égal à $\overrightarrow{v_1}$:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{v} \in V.$$

Le cas $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$ se traite de manière analogue, et on en déduit que l'addition entre $\overrightarrow{0}$ et un autre vecteur $\overrightarrow{v}$ est correctement définie, et que

$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{v} \in V.$$

Il nous reste à prouver la conclusion du théorème dans le cas de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ non-nuls, illustré dans la figure suivante :



On doit donc prouver que les segments $[AC]$ et $[MP]$ ont la même direction, le même sens, et la même longueur, donc on doit prouver que $ACPM$ est un parallélogramme.

Nous savons que les segments $[AB]$ et $[MN]$ sont des représentants du même vecteur, $\overrightarrow{v_1}$, donc que le quadrilatère $ABNM$ est un parallélogramme. Les deux autres côtés opposées de ce parallélogramme, $[MA]$ et $[NB]$, sont donc deux représentants d'un même vecteur, à savoir $\overrightarrow{MA}$.

Nous savons aussi que les segments $[BC]$ et $[NP]$ sont des représentants du même vecteur, $\overrightarrow{v_2}$, donc que le quadrilatère $BCPN$ est un parallélogramme. Les deux autres côtés opposées de ce parallélogramme, $[NB]$ et $[PC]$, sont donc deux représentants d'un même vecteur. Mais nous savons déjà que $[NB]$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{MA}$; on en déduit que $[PC]$ est lui aussi un représentant du vecteur $\overrightarrow{MA}$.

On a ainsi prouvé que $[MA]$ et $[PC]$ sont deux représentants d'un même vecteur. Il en résulte que $MACP$ est un parallélogramme - or le quadrilatère $ACPM$ n'est rien d'autre que $MACP$ (on commence juste à lire son nom à partir d'un autre sommet).

Nous avons donc prouvé que $ACPM$ est un parallélogramme, donc que les segments $[AC]$ et $[MP]$ ont la même direction, le même sens, et la même longueur. $\square$

2.2. **Propriétés de l'addition des vecteurs.** Nous avons donc prouvé que l'addition des vecteurs est correctement définie, et que, de plus, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ joue un rôle spécial vis-à-vis de l'addition.

2.2.1. *Element neutre.* En effet, on a vu que faire la somme entre le vecteur nul et un autre vecteur $\overrightarrow{v}$ ne change pas la valeur de $\overrightarrow{v}$.

On dit que le vecteur nul est *l'élément neutre* de l'addition : le rajouter à un vecteur quelconque ne change pas la valeur de ce vecteur.

2.2.2. *Commutativité.* On observe aussi que l'ordre dans lequel on additionne les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ n'a pas d'importance.

Théorème 3. *L'addition des vecteurs est commutative :*

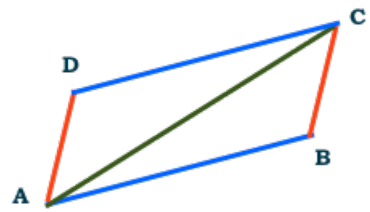
$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \qquad \forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V.$$

Preuve du Théorème : Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, deux vecteurs de l'espace V.

Calculons d'abord $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$. Soit $[AB]$ un des représentants du vecteur $\overrightarrow{v_1}$, et $[BC]$ le seul représentant du vecteur $\overrightarrow{v_2}$ qui a B comme origine. Nous savons que le segment $[AC]$ est un des représentants du vecteur $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$:

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Calculons maintenant $\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$. On considère $[AD]$, le seul représentant de $\overrightarrow{v_2}$ qui a le point A comme origine ; il nous faut maintenant à trouver le seul représentant de $\overrightarrow{v_1}$ qui a l'origine en D.



Pour le trouver, observons que les segments $[BC]$ et $[AD]$ sont des représentants du même vecteur, à savoir $\overrightarrow{v_2}$, donc que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Par conséquent, les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont deux représentants du même vecteur.

Or, nous savons que $[AB]$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{v_1}$. Il résulte que $[DC]$ est le représentant de $\overrightarrow{v_1}$ qui a le point D comme origine, et alors que

$$\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

On peut ainsi conclure que

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1},$$

et donc que l'addition est commutative. $\square$

2.2.3. *Associativité.* Pour faire la somme des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, on peut procéder de deux manières différents.

1ère manière : calculer d'abord la somme entre $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, et ensuite faire la somme entre $(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})$ et le troisième vecteur $\overrightarrow{v_3}$.

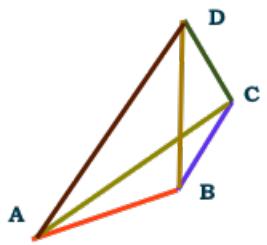
2ème manière : calculer dans une première étape la somme $\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}$, et ensuite faire la somme entre le premier vecteur $\overrightarrow{v_1}$ et $(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3})$.

On peut démontrer que les deux méthodes donnent le même résultat .

Théorème 4. *Soit $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ trois vecteurs de l'espace V. Alors*

$$(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}).$$

Preuve du Théorème : Soit $[AB]$ un représentant quelconque de $\overrightarrow{v_1}$, $[BC]$ le seul représentant de $\overrightarrow{v_2}$ dont l'origine est B, et $[CD]$ le seul représentant de $\overrightarrow{v_3}$ qui a C comme origine.



Alors

$$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

donc

$$(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

En même temps,

$$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD},$$

ce qui implique que

$$\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

On obtient que

$$(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}).$$

□

Nous avons ainsi prouvé que les deux méthodes donnent le même résultat ; nous allons résumer cela en disant que l'addition des vecteurs est *associative*.

2.2.4. *Vecteur opposé à un vecteur donné.* .

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur, et $[AB]$ un de ses représentants. Le vecteur qui a comme représentant le segment $[BA]$ sera noté $-\overrightarrow{v}$, et appelé le vecteur *opposé* à $\overrightarrow{v}$.

Comme pour la somme des deux vecteurs, il faut d'abord prouver que cette définition est correcte. En effet, on peut déterminer le vecteur $-\overrightarrow{v}$ à partir d'un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$, et on risque d'obtenir un autre vecteur opposé. Il faut donc prouver qu'on obtient le même vecteur opposé, quel qu'il soit le représentant de $\overrightarrow{v}$ avec lequel on travaille.

Théorème 5. *La définition du vecteur opposé est cohérente.*

Preuve du Théorème : Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux représentants du vecteur $\overrightarrow{v}$. Nous voulons prouver que les segments $[BA]$ et $[DC]$ sont deux représentants du même vecteur (en occurrence $-\overrightarrow{v}$), donc que les segments $[BA]$ et $[DC]$ ont la même direction, le même sens, et la même longueur.

Pour cela, il faut prouver que le quadrilatère $BACD$ est un parallélogramme ; or, $[AB]$ et $[CD]$ sont deux représentants du vecteur $\overrightarrow{v}$, donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Mais le quadrilatère $BACD$ n'est rien d'autre que le quadrilatère $ABDC$, lu à l'envers, et à partir du sommet B plutôt que A. Donc, $BACD$ est un parallélogramme, et nous avons démontré ainsi que les segments $[BA]$ et $[DC]$ sont deux représentants du même vecteur. □

La principale proprieté du vecteur opposé reside dans la formule suivante :

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

En effet, soit $[AB]$ un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$; alors $[BA]$ est un représentant de $-\overrightarrow{v}$, et alors

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0},$$

et

$$(-\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}.$$

Question 5. *Trouvez le seul vecteur qui soit égal à son opposé.*

2.2.5. *En conclusion.* On a établi que l'addition des vecteurs à les propriétés suivantes :
- elle est commutative ;
- elle est associative ;
- elle admet un élément neutre, à savoir le vecteur nul ;
- tout vecteur admet un vecteur opposé.

Quand ces propriétés sont réunies, on dit qu'on est en présence d'un *group additif commutatif.* Donc, l'ensemble V des vecteurs, avec l'addition $+$ et l'élément neutre $\overrightarrow{0}$ forme un groupe commutatif.

2.3. Norme de la somme et somme des normes.

Théorème 6. *Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs. Alors, la norme de la somme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est plus petite ou égale à la somme des deux normes $\|\overrightarrow{v_1}\|$ et $\|\overrightarrow{v_2}\|$:*

$$\|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\| \leq \|\overrightarrow{v_1}\| + \|\overrightarrow{v_2}\|.$$

Preuve du Théorème : Soit $[AB]$ et $[BC]$ deux représentants de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Alors le segment $[AC]$ est le représentant de la somme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Rappelons la propriété qui dit "la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande ou égale que la longueur du troisième côté". Appliquée au triangle ABC, ce théorème nous dit que la somme des longueurs des segments $[AB]$ et $[BC]$ est plus grande ou égale que la longueur du segment $[AC]$. Mais la longueur du segment $[AB]$ est la norme de $\overrightarrow{v_1}$, la longueur du segment $[BC]$ est la norme de $\overrightarrow{v_2}$, et la longueur du segment $[AC]$ est la norme de la somme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Nous avons par conséquent prouvé que la norme d'une somme de deux vecteurs est plus petite ou égale à la somme des normes des deux vecteurs. □

Risque d'erreurs :

Il n'est donc pas vrai d'affirmer que la norme de la somme de deux vecteurs est égale à la somme des normes des vecteurs. Il faut mentionner que Descartes lui-même pensait, en 1641, que la norme de la somme et la somme des normes devraient être égales.

2.4. Produit entre un nombre réel et un vecteur.

Le produit entre un nombre réel et un vecteur se définit comme suit :

Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{v}$ un vecteur.

Si $k > 0$, alors $k \times \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{v}$, et $\|k \times \overrightarrow{v}\| = k \times \|\overrightarrow{v}\|$.

Si $k < 0$, alors $k \times \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur qui a la même direction et le sens opposé à $\overrightarrow{v}$, et $\|k \times \overrightarrow{v}\| = -k \times \|\overrightarrow{v}\|$.

Finalement, $0 \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Le produit entre 1 et le vecteur $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}$ lui-même,

$$1 \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v},$$

et le produit entre -1 et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{v}$, donc

$$(-1) \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}.$$

Soient a, b, deux nombre réels, et $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, deux vecteurs. On peut monter que :

$$(a+b) \times \overrightarrow{v_1} = a \times \overrightarrow{v_1} + b \times \overrightarrow{v_1},$$
$$a \times (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = a \times \overrightarrow{v_1} + a \times \overrightarrow{v_2},$$
$$(a \times b) \times \overrightarrow{v_1} = a \times (b \times \overrightarrow{v_1}).$$

Question 6. *Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs de norme un. Pour chacune des affirmation suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :*

$$(2+\pi)\overrightarrow{v_1} = 2 + \pi \times \overrightarrow{v_1}$$
$$(1 \times 3) \times \overrightarrow{v_1} = 3 \times \overrightarrow{v_1}$$
$$(2+3) \times (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = 2 \times \overrightarrow{v_1} + 3 \times \overrightarrow{v_2}$$

3. Base de l'espace V_2 de tous les vecteurs du plan

3.1. Vecteurs colinéaires. Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, deux vecteurs non-nuls de V.

Les deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont *colinéaires* s'ils ont la même direction.

De manière équivalente, on peut dire que deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel non-nul k tel que $\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}$.

Soient $[AB]$ et $[AC]$, deux représentants des vecteurs non-nuls $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. En général, en reliant les trois points A, B et C, on obtient un triangle. Parfois, les trois points ne forment pas un triangle, mais se trouvent sur une même droite : on dit alors qu'ils sont *alignés*. On voit maintenant que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement si les trois points A, B et C sont alignés.

Par définition,

Le vecteur nul est colinéaire avec tout autre vecteur.

Question 7. *Soit A, B et C, les sommets d'un triangle équilatéral du plan, et D un point du même plan. Parmi les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$, combien sont colinéaires avec $\overrightarrow{DA}$? (attention, il y a plusieurs réponses possibles, en fonction de la position des points D, A, B et C)*

Question 8. *Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non-colinéaires. Trouvez le seul vecteur $\overrightarrow{v}$ colinéaire aussi bien avec $\overrightarrow{i}$ qu'avec $\overrightarrow{j}$.*

3.2. Base des vecteurs du plan. Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non-colinéaires de V_2. Un résultat très important pour l'étude des vecteurs affirme que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de V_2 s'écrit comme une combinaison entre les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et que cette combinaison est unique.

Théorème 7. *Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ du plan, il existe deux nombres réels v_x et v_y tels que*

$$\overrightarrow{v} = v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j}.$$

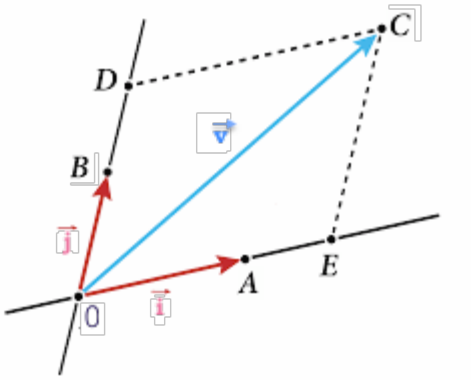
Ces deux nombres sont uniques.

Preuve du Théorème :

Partie 1 de la preuve : l'existence des nombres v_x et v_y.

Soit 0 un point quelconque du plan ; on considère $[0A]$, $[0B]$ et $[0C]$ les représentants ayant 0 comme origine des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}$. Par conséquent, $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0B}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0C}$.

Faisons passer par le point C une droite parallèle avec la droite $0A$, et notons D le point où cette droite intersecte la droite $0B$. Pareil, on fait passer par le point C une deuxième droite parallèle cette fois-ci avec la droite $0B$, et on note E le point d'intersection avec la droite $0A$.



Le quadrilatère $0ECD$ est un parallélogramme, donc les segments $[0D]$ et $[EC]$ sont des représentants d'un même vecteur : $\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{EC}$; alors

$$\overrightarrow{0E} + \overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0E} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0C}.$$

En même temps, les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{0E}$ sont colinéaires, ce qui veut dire qu'il existe un nombre réel (qu'on notera v_x) tel que $\overrightarrow{0E} = v_x \times \overrightarrow{i}$. Mais les vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{0D}$ sont aussi colinéaires, donc il existe un nombre réel (disons v_y) tel que $\overrightarrow{0D} = v_y \times \overrightarrow{j}$.

Par conséquent, on a prouvé l'existence de deux nombres réels v_x et v_y tels que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0E} + \overrightarrow{0D} = v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j}.$$

Partie 2 de la preuve : unicité des nombres v_x et v_y.

Supposons, avec l'intention de trouver une contradiction, qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ et quatre nombres réels a, b, c et d tels que

$$\overrightarrow{v} = a \times \overrightarrow{i} + b \times \overrightarrow{j} = c \times \overrightarrow{i} + d \times \overrightarrow{j},$$

et que $a \neq c$ ou $b \neq d$.

En faisant la différence entre les expressions $a \times \overrightarrow{i} + b \times \overrightarrow{j}$ et $c \times \overrightarrow{i} + d \times \overrightarrow{j}$ on obtient que

$$\overrightarrow{0} = (a-c) \times \overrightarrow{i} + (b-d) \times \overrightarrow{j},$$

donc que

$$(a-c) \times \overrightarrow{i} = (d-b) \times \overrightarrow{j}.$$

On sait que $a \neq c$ ou $b \neq d$; donc, ou le nombre $(a-c)$, ou le nombre $(d-b)$ (voir les deux) sont non-nuls. Si $(a-c) \neq 0$, on divise par $(a-c)$, tandis que si $(d-b)$ est un nombre non-nul, on en divise par $(d-b)$, et on obtient que

$$\overrightarrow{i} = \frac{d-b}{a-c} \times \overrightarrow{j} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{j} = \frac{a-c}{b-d} \times \overrightarrow{j}.$$

Dans les deux cas, on en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont colinéaires, ce qui est faux (l'énoncé dit clairement que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires). Cette contradiction prouve que notre hypothèse de départ est fausse, donc que les nombres v_x et v_y sont uniques. □

On définit un *couple* de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme une paire ordonnée de vecteurs ; par conséquent, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$ est un couple différent de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Un couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ formé de deux vecteurs non-colinéaires s'appelle *base* de l'espace V_2.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, les nombres v_x et v_y tels que

$\boxed{\overrightarrow{v} = v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j}}$ **s'appellent**

les *coordonnées* du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Attention : L'ordre des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dans la base est importante. Si le couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de V_2, alors le couple $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$ est bien une base de V_2, mais différente de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Les coordonnées v_x et v_y portent généralement des noms :

On appelle v_x *l'abscisse* de $\overrightarrow{v}$ et v_y *l'ordonnée* de $\overrightarrow{v}$.

Question 9. *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de V_2 ; quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ par rapport à cette base ?*

Qui est le vecteur qui a comme cordonnées par rapport à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de V_2 les nombres -1 et 0 ?.

Parce qu'il existe une infinité de paires de vecteurs non-colinéaires, il existe une infinité de bases de l'espace V_2. Si on change la base, les coordonnées d'un vecteur vont elles aussi changer (les formules de changement des coordonnées en fonction du changement de base seront étudiées au semestre deux).

Question 10. *Soit la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de V_2. Combien de bases se trouvent parmi les trois couples suivants : $(-\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j})$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$ et $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$?*

Question 11. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur qui a les mêmes coordonnées dans toutes les bases de V_2. Qui est $\overrightarrow{v}$?*

3.3. Formules par coordonnées de la somme de deux vecteurs, et du produit entre un vecteur et un nombre réel.

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de V_2. On considère k un nombre réel, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de V_2, dont les coordonnées par rapport à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ seront notées u_x, u_y, v_x et v_y.

Notre objectif est de calculer les coordonnées de $k \times \overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ par rapport à la même base.

Théorème 8. *Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{u}$ un vecteur dont les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont u_x et u_y. Alors les coordonnées du vecteur $k \times \overrightarrow{u}$ par rapport à la même base sont $k \times u_x$ et $k \times u_y$.*

Preuve du Théorème : Parce que u_x et u_y sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a :

$$k \times \overrightarrow{u} = k \times (u_x \times \overrightarrow{i} + u_y \times \overrightarrow{j}). \tag{1}$$

On utilise dans un premier temps la propriété

$$a \times (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = a \times \overrightarrow{v_1} + a \times \overrightarrow{v_2},$$

pour le cas $a = k$ et $\overrightarrow{v_1} = u_x \times \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v_2} = u_y \times \overrightarrow{j}$ et on obtient que

$$k \times (u_x \times \overrightarrow{i} + u_y \times \overrightarrow{j}) = k \times (u_x \times \overrightarrow{i}) + k \times (u_y \times \overrightarrow{j}). \tag{2}$$

On va maintenant utiliser la propriété

$$(a \times b) \times \overrightarrow{v_1} = a \times (b \times \overrightarrow{v_1}),$$

tout d'abord pour $a = k$, $b = u_x$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i}$ pour déduire que

$$k \times (u_x \times \overrightarrow{i}) = (k \times u_x) \times \overrightarrow{i}, \tag{3}$$

et ensuite pour $a = k$, $b = u_y$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{j}$ pour déduire que

$$k \times (u_y \times \overrightarrow{j}) = (k \times u_y) \times \overrightarrow{j}. \tag{4}$$

En mettant ensemble les relations (1 - 4) on en déduit que

$$k \times \overrightarrow{u} = (k \times u_x) \times \overrightarrow{i} + (k \times u_y) \times \overrightarrow{j},$$

ce qui veut dire que les coordonnées du vecteur $k \times \overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $k \times u_x$ et $k \times u_y$. $\square$

Risque d'erreurs :
Quand on cherche les coordonnées du produit entre le nombre k et le vecteur $\overrightarrow{u}$ il faut faire le produit entre le réel k et toutes les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$; écrire que les coordonnées de $k \times \overrightarrow{u}$ sont $(k \times u_x; u_y)$, donc ne faire le produit qu'avec la première coordonnée, est une erreur.

Théorème 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de V_2, dont les coordonnées par rapport à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont u_x, u_y, pour $\overrightarrow{u}$, et v_x et v_y pour $\overrightarrow{v}$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ par rapport à la même base sont $u_x + v_x$ et $u_y + v_y$.*

Preuve du Théorème : Parce que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont u_x, u_y, v_x et v_y, on a

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_x \times \overrightarrow{i} + u_y \times \overrightarrow{j}) + (v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j}). \tag{5}$$

Mais la somme des vecteurs est commutative et associative, donc on peut changer l'ordre des vecteurs et déplacer les parenthèses ; on en obtient que :

$$\begin{aligned} & (u_x \times \overrightarrow{i} + u_y \times \overrightarrow{j}) + (v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j}) \\ = \ & (u_x \times \overrightarrow{i} + v_x \times \overrightarrow{i}) + (u_y \times \overrightarrow{j} + v_y \times \overrightarrow{j}). \end{aligned} \tag{6}$$

On va utiliser la propriété

$$(a+b) \times \overrightarrow{v_1} = a \times \overrightarrow{v_1} + b \times \overrightarrow{v_1},$$

une première fois pour le cas $a = u_x$, $b = v_x$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i}$, et on obtient que

$$u_x \times \overrightarrow{i} + v_x \times \overrightarrow{i} = (u_x + v_x) \times \overrightarrow{i}, \tag{7}$$

et une deuxième pour le cas $a = u_y$, $b = v_y$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{j}$, et on obtient que

$$u_y \times \overrightarrow{j} + v_y \times \overrightarrow{j} = (u_x + v_x) \times \overrightarrow{i}. \tag{8}$$

En combinant les relations (5-8) on en obtient que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_x + v_x) \times \overrightarrow{i} + (u_x + v_x) \times \overrightarrow{i}.$$

Ainsi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $u_x + v_x$ et $u_y + v_y$. $\square$

En conclusion, soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base fixée. Alors, les coordonnées du produit entre un nombre k et un vecteur $\overrightarrow{v}$ sont le produit entre le nombre k et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$. L'abscisse de la somme entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la somme entre les abscisses de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$; l'ordonnée de la somme entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la somme entre les ordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

Risque d'erreurs :
La somme de deux vecteurs est un vecteur, et non pas un nombre. Faire la somme des deux abscisses et des deux ordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, donc calculer le nombre $u_x + v_x + u_y + v_y$, quand on demande la somme entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est une erreur.

4. Base de l'espace V_3 de tous les vecteurs de l'espace à trois dimensions

4.1. Vecteurs coplanaires dans l'espace à trois dimensions.

Soit quatre points dans l'espace à trois dimensions. En général, en les reliant, on obtient un tétraèdre (une pyramide à base triangulaire), mais parfois ces quatre points sont contenus dans un même plan ; on dit que ces points sont *coplanaires.*

Soient trois vecteurs de V_3 : $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, et $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ trois représentants de ces vecteurs ayant la même origine. Dans la définition de la coplanarité, on distingue deux cas : les trois vecteurs sont non-nuls ou au moins un de ces vecteurs est nul.

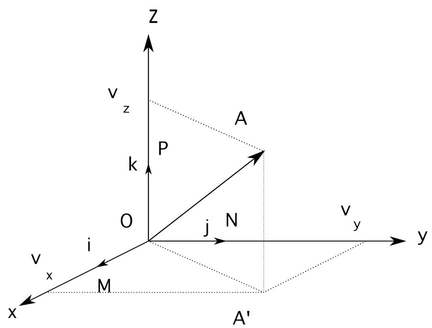
Trois vecteurs non-nuls $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont *coplanaires* si les quatre points A, B, C et D sont contenus dans un même plan.

Si, parmi trois vecteurs données de V_3, il y en a au moins un qui soit nul, alors les trois vecteurs en question sont automatiquement coplanaires.

Question 12. *Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de V_3. On sait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ?*

4.2. **Base des vecteurs de l'espace à trois dimensions.** Soient trois vecteurs non-coplanaires $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0M}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0N}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0P}$ de V_3. De la même manière que pour le cas des vecteurs du plan, on démontre que tout vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0A}$ de V_3 s'exprime de manière unique comme une combinaison des trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$:

$$\exists!\ v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}.$$



On définit un *triplet* de vecteurs comme une famille ordonnée de trois vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Comme pour les couples définis au chapitre 3.2, l'ordre est très important dans un triplet.

Question 13. *Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs différents deux par deux. Combien de triples différents peut-on former avec ces trois vecteurs ?*

Un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ formé de trois vecteurs non-coplanaires s'appelle *base* de l'espace V_3. Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, les nombres v_x, v_y et v_z tels que $\overrightarrow{v} = v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j} + v_z \times \overrightarrow{k}$ s'appellent les *coordonnées* du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Comme pour le cas du plan, les coordonnées v_x, v_y et v_z d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ portent des noms :

On appelle v_x *l'abscisse* de $\overrightarrow{v}$, v_y *l'ordonnée* de $\overrightarrow{v}$, et v_z la *cote* de $\overrightarrow{v}$.

Soit k un nombre réel, $\overrightarrow{u} = u_x \times \overrightarrow{i} + u_y \times \overrightarrow{j} + u_z \times \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = v_x \times \overrightarrow{i} + v_y \times \overrightarrow{j} + v_z \times \overrightarrow{k}$ deux vecteurs de V_3. On prouve de la même manière que pour le cas du plan les formules des coordonnées de la somme de deux vecteurs et du produit entre un nombre réel et un vecteur :

$$k \times \overrightarrow{v} = (k \times v_x) \times \overrightarrow{i} + (k \times v_y) \times \overrightarrow{j} + (k \times v_z) \times \overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_x + v_x) \times \overrightarrow{i} + (u_y + v_y) \times \overrightarrow{j} + (u_z + v_z) \times \overrightarrow{k}.$$

En conclusion, soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base fixée. Alors, les coordonnées du produit entre un nombre k et un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont le produit entre le nombre k et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$. L'abscisse de la somme entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la somme entre les abscisses de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$; l'ordonnée de la somme entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la somme entre les ordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, et la cote de la somme entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la somme entre les cotes de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

5. Types de bases : normée, orthogonale, orthonormée

Un vecteur de norme égale à 1 s'appelle *unitaire*.

Question 14. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non-nul. Trouvez un vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$ qui ait la même direction et le même sens que $\overrightarrow{v}$.*

Une base de l'espace V dont tous les vecteurs sont unitaires s'appelle *normée*.

Si l'angle entre deux vecteurs est de $\frac{\pi}{2}$, ces deux vecteurs s'appellent *orthogonaux*.

Une base de l'espace V dont les vecteurs sont orthogonaux deux par deux s'appelle *orthogonale*.

Une base à la fois normée et orthogonale s'appelle *orthonormée*

Question 15. *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de V_2. Est-ce que la base $(2 \times \overrightarrow{i}, 2 \times \overrightarrow{j})$ est normée ? orthogonale ? orthonormée ? Mêmes questions pour la base $\left(\frac{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}, \overrightarrow{j}\right)$.*

Le pouce, l'index et le majeur, peuvent vous donner une idée d'une base orthonormée de l'espace V_3 : on écarte les trois doigts, (comme illustré dans la sculpture de l'artiste marseillais Fouad Bouchoucha érigée sur le Vieux Port en 2013) et on imagine $\overrightarrow{i}$ qui suit le pouce, $\overrightarrow{j}$ qui suit l'index et $\overrightarrow{k}$ qui suit le majeur.

On peut faire cet exercice avec chacune des deux mains ; les deux bases ainsi obtenues, toutes les deux orthonormées, sont l'une par rapport à l'autre des images dans un miroir, et ne peuvent pas être superposées. Il existent donc deux sortes de bases orthonormées dans V_3 - celle qui correspond à la main droite - appelée *base directe*, et celle qui correspond à la main gauche, appelée *base indirecte*.

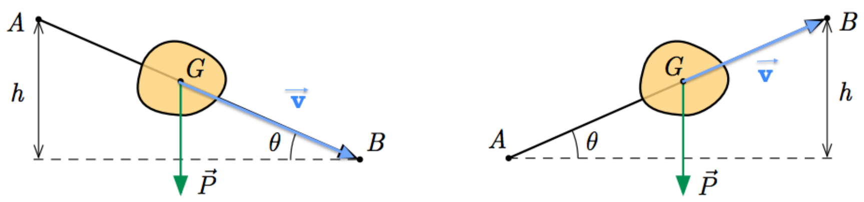
Question 16. *Soit* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *une base orthonormée directe de* V_3. *Parmi les bases orthonormées suivantes,*

$$(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}), \quad (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) \text{ et } (-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}),$$

lesquelles sont directes, lesquelles sont indirectes ?

6. Produit scalaire de deux vecteurs

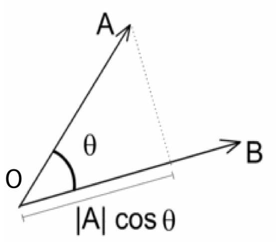
Problème physique : Étudier l'effet d'une force sur une particule en mouvement.



Si la force est appliquée plutôt dans le sens de mouvement de la particule, comme dans le cas du poids $\overrightarrow{P}$ de la particule G qui descend le plan incliné AB, la vitesse de la particule augmentera. En revanche, la particule G sera freinée, si le poids $\overrightarrow{P}$ s'oppose à sa vitesse $\overrightarrow{v}$, ce qui se passe si G monte le plan incliné.

Pour quantifier l'effet d'une force sur le mouvement d'une particule (appelé *puissance instantanée de la force*), on utilise la notion de produit scalaire de deux vecteurs (introduit vers 1840 par le mathématicien allemand Grassmann).

6.1. **Définition géométrique du produit scalaire.**

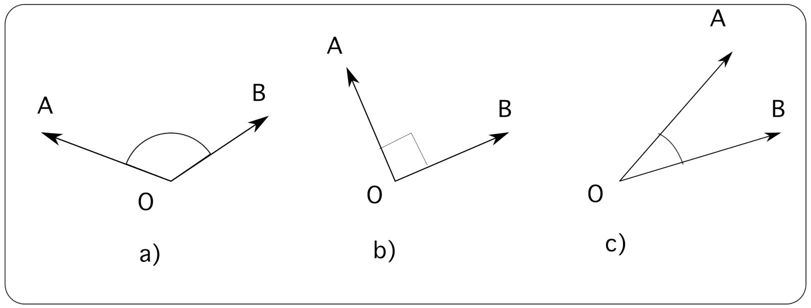


Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs de l'espace V (donc deux vecteurs du plan ou de l'espace à trois dimensions), et $[0A]$ et $[0B]$ deux de leurs représentants ayant la même origine 0.

Leur produit scalaire se note $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}$ et se définit comme le nombre réel obtenu en faisant le produit entre la longueur des segments $[0A]$ et $[0B]$ et le cosinus de l'angle $\theta = \measuredangle A0B$ qui se forme entre ces deux segments :

$$\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = |0A|\,|0B|\,\cos(\theta).$$

Parce que $|0A|\cos(\theta)$ est la longueur de la projection du segment $[0A]$ sur la droite $0B$, on peut interpréter le produit scalaire de $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i}$ comme le produit entre la longueur du segment $[0B]$ et de la projection du segment $[0A]$ sur la droite $0B$ (prise avec le signe + si elle tombe du même côté que le segment $[0B]$, et avec le signe − dans le cas contraire).



On voit donc que, si l'angle entre les deux vecteurs est obtus (dessin a)), le produit scalaire est négatif, que si les deux vecteurs sont perpendiculaires (dessin b)), alors leur produit scalaire est nul, et que ce produit est positif (dessin c)) quand l'angle est aigu.

Parce que l'angle entre un vecteur et lui-même est zéro, et que le cosinus de zéro est égal à 1, il résulte que la norme du vecteur

$\overrightarrow{v}$ est égale à la racine carré du produit scalaire entre le vecteur et lui-même :

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.$$

Attention : Les notions de valeur absolue pour les nombres réels, de module pour les nombres complexes, et de norme pour les vecteurs, sont apparentées, mais ne doivent pas être employées les unes en lieu et place des autres.

On peut prouver (mais cela ne sera pas fait ici) que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{z} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{z}$$

quel qu'il soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{z}$. Cette propriété du produit scalaire s'appelle la *bi-linéarité*.

6.1.1. *La formule par coordonnées du produit scalaire.* Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée de V_3.

Parce que les normes des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont égales à 1, on a que :

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1.$$

Parce que les angles entre les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$, pris deux par deux, sont de $\frac{\pi}{2}$, et que le cosinus de $\frac{\pi}{2}$ est égal à zéro, il résulte que :

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0.$$

Soit $\overrightarrow{v} : (v_x, v_y, v_z)$ et $\overrightarrow{u} : (u_x, u_y, u_z)$ deux vecteurs de E_3. Alors, en utilisant la bi-linéarité du produit scalaire, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= \left(v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_k \overrightarrow{k}\right) \cdot \left(u_x \overrightarrow{i} + u_y \overrightarrow{j} + u_k \overrightarrow{k}\right) \\
&= v_x u_x \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + v_y u_y \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} + v_z u_z \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} \\
&\quad + v_x u_y \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + v_x u_z \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} + v_y u_z \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} \\
&\quad + v_y u_x \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + v_y u_z \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} + v_z u_x \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} \\
&= v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z.
\end{aligned}$$

En d'autres mots, pour calculer le produit de deux vecteurs dont on connait les coordonnées par rapport à une base orthonormée, il suffit de calculer les produits des coordonnées par rapport aux mêmes axes, et faire la somme de ces trois nombres.

Attention : si la base par rapport à laquelle on calcule les coordonnées des deux vecteurs n'est pas orthonormée, le produit scalaire n'est pas égal avec la somme des produits des coordonnées.

Question 17. *Le produit scalaire est-il commutatif ? Est-il associatif ?*

Une première application de cette formule est le calcul de la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées :

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

(bien entendu, cette formule n'est valable que si on travaille dans une base orthonormée).

Risque d'erreurs :

Dire que $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_x + v_y + v_z$ parce que "le carrée et la racine carrée se simplifient" est faux.

Sur cette base, on peut calculer le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$. En effet,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{u}\| \cos\left(\measuredangle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right),$$

mais

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_x \, u_x + v_y \, u_y + v_z \, u_z,$$

tandis que

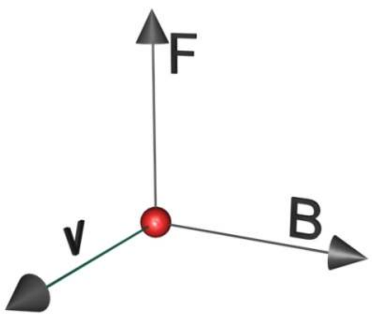
$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \qquad \left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Par conséquent,

$$\cos\left(\measuredangle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = \frac{v_x \, u_x + v_y \, u_y + v_z \, u_z}{\sqrt{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \, \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)}}.$$

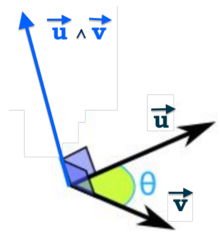
7. Produit vectoriel de deux vecteurs

Problème physique Si une particule chargée électriquement (un électron, par exemple) se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champs électromagnétique, dont le champs magnétique est décrit par le vecteur $\overrightarrow{B}$, elle subit les effets d'une force $\overrightarrow{F}$ (dite force de Lorentz) qui est perpendiculaire à la fois à la vitesse de la particule, et au champs magnétique.



Comme on pouvait d'attendre, la norme de cette force depend de la norme des vecteurs $\overrightarrow{B}$ (l'intensité du champs magnétique) et $\overrightarrow{v}$ (la vitesse de la particule). Plus inattendu, la norme de la force depend aussi de l'angle entre la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la particule et le vecteur $\overrightarrow{B}$ du champs magnétique. Plus précisément, la force de Lorentz est nulle si la vitesse est orientée d'après les lignes du champs magnétique, et est égale au produit entre les normes des vecteurs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$ (en atteignant ainsi sa taille maximale) si la vitesse coupe perpendiculairement ces lignes. Pour trouver l'expression de la force de Lorentz, on utilise la notion de produit vectoriel de deux vecteurs (introduite toujours par Grassmann, en 1840).

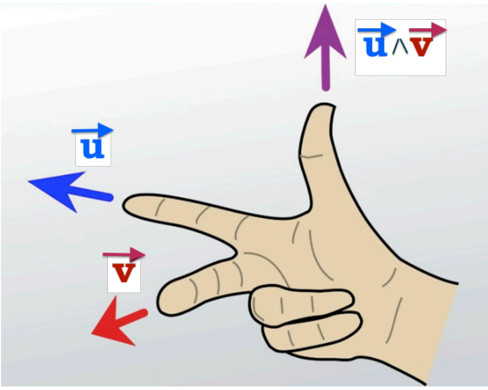
7.1. **Définition géométrique du produit vectoriel.** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de V_3. Leurs produit vectoriel, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$,



dont la norme est donnée par la formule

$$\left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \, \left\|\overrightarrow{v}\right\| \sin(\theta)$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le sens du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est donné par la règle de la main droite :



si on place sa main de telle façon que l'index suit le vecteur $\overrightarrow{u}$, et le majeur suit le vecteur $\overrightarrow{v}$, alors le pouce indiquera le sens de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Cette opération a des propriétés très éloignées des propriétés habituelles des opérations déjà étudiées. Ainsi,

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad \forall \overrightarrow{v} \in V_3.$$

En plus,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3,$$

donc le produit vectoriel n'est pas commutatif, comme presque toutes les opérations usuelles, mais anti-commutatif.

Pour déterminer si le produit vectoriel est associatif, calculons le produit entre trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de V_3 de deux manières possibles.

On ne démontrera pas la formule

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{u};$$

remarquons que cela donne (en utilisant l'anti-commutativité du produit vectoriel) que

$$\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) \overrightarrow{w}.$$

Question 18. *Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne soient pas colinéaires. La relation*

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)$$

est-elle vraie ou fausse ?

Le produit vectoriel est-il une opération associative ?

Question 19. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Calculez $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.*

Question 20. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que leur produit vectoriel est égal à $\overrightarrow{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?*

7.2. **La formule par coordonnées du produit vectoriel.** Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée de V_3. Alors le vecteur $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$ est de norme égale à

$$\|\overrightarrow{i}\| \times \|\overrightarrow{j}\| \times \sin\left(\measuredangle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) = 1 \times 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

et a une direction simultanément orthogonale à $\overrightarrow{i}$ et à $\overrightarrow{j}$.

Mais il existe exactement deux vecteurs de norme 1 qui sont perpendiculaires simultanément sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$: il s'agit de $\overrightarrow{k}$ et de $-\overrightarrow{k}$.

Si la base est directe, alors la règle de la main droite nous dit que $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$; si la base est indirecte, alors $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{k}$.

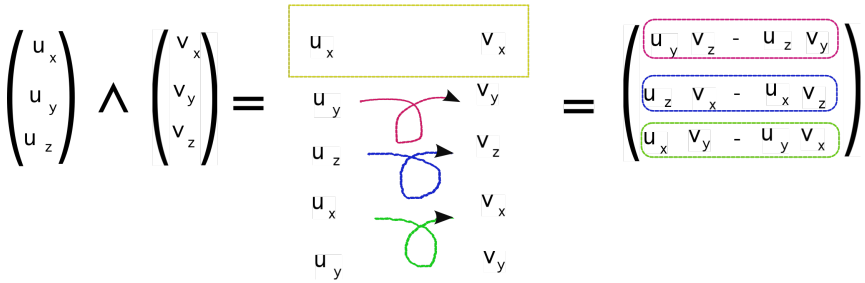
Dans ce chapitre, on considère une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Question 21. *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de V_3. On sait donc que $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$; calculez $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}$.*

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base directe, et $\overrightarrow{u} : (u_x, u_y, u_z)$, $\overrightarrow{v} : (v_x, v_y, v_z)$ deux vecteurs. Alors, en développant on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \left(u_x \overrightarrow{i} + u_y \overrightarrow{j} + u_z \overrightarrow{k}\right) \wedge \left(v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= u_x v_x \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} + u_x v_y \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} + u_x v_z \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{z} \\
&+ u_y v_x \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + u_y v_y \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} + u_y v_z \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{z} \\
&+ u_z v_x \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} + u_z v_y \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} + u_z v_z \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{z} \\
&= (u_y v_z - u_z v_y) \overrightarrow{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \overrightarrow{j} \\
&\quad + (u_x v_y - u_y v_x) \overrightarrow{k}.
\end{aligned}$$

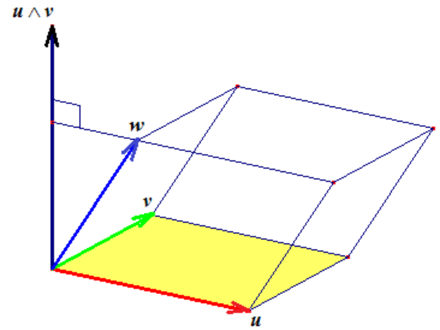
Pour essayer de retenir cette formule, on peut écrire les deux vecteurs qu'on veut multiplier en colonne, recopier sous les vecteurs respectifs leurs deux premières coordonnées, enlever la première ligne (qui contient les coordonnées u_x et v_x), et faire, sur les quatre qui restent, les calculs indiqués par les lignes de couleur :



Donc, pour la première composante du produit vectoriel, on commence par u_y, qu'on multiplie par v_z (la deuxième coordonnée sur le trajet rouge), ensuite on met le signe moins (correspondant au fait que la ligne rouge rebrousse chemin), et on rajoute le produit entre u_z et v_y, là où la ligne rouge se termine.

Attention : si la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ n'est pas orthonormée et directe, ces formules ne sont pas vraies.

7.3. Produit mixte de trois vecteurs.



En combinant les produit scalaires et vectoriels on peut définir le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w}.$$

Ce produit est un nombre réel (il peut être positif, négatif ou nul) ; sa valeur absolue est égale au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs (on ne démontrera pas ce fait).

L'application la plus importante de la notion de produit mixte réside sans doute dans l'affirmation suivante.

Théorème 10. *Trois vecteurs, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de V_3 sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est zéro. Par conséquent, trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment une base de V_3 si et seulement si leur produit mixte est non nul (cette base n'est pas forcement ni orthonormée, ni directe).*

Preuve du Théorème. Preuve de la partie "si" : on considère trois vecteurs, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de V_3 tels que leur produit mixe soit égal à zéro, et $[0A]$, $[0B]$ et $[0C]$ trois de leurs représentants ayant comme origine le même point 0. Notre objectif est de prouver que ces trois vecteurs sont coplanaires.

On distingue deux cas : cas 1, quand $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, et cas 2, quand $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Cas 1) : Parce que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, il résulte que les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0B}$ sont colinéaires, donc qu'il existe une droite Δ qui contient les points A, B et 0. Soit Π le plan qui passe par le point C et contient la droite Δ ; les quatre points 0, A, B et

C sont contenus dans Π, ce qui veut dire que les trois vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0B}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0C}$ sont coplanaires.

Cas 2) : On note N le seul point tel que $\overrightarrow{0N} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note Π le plan qui passe par 0 et qui est orthogonal au segment $[0N]$. Nous savons que le vecteur $\overrightarrow{0N}$ est le produit vectoriel de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0A}$ et de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0B}$, ce qui veut dire que le segment $[0N]$ est simultanément orthogonal aux segments $[0A]$ et $[0B]$. On en déduit que les points 0, A et B sont tous les trois contenus dans Π. Par ailleurs, le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0N}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0C}$ sont orthogonaux, et le point C appartient lui aussi au plan Π.

On a ainsi prouvé que le plan Π passe par tous les quatre points 0, A, B et C, ce qui veut dire que les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0B}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0C}$ sont coplanaires.

Preuve de la partie "seulement si" : on considère trois vecteurs coplanaires, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de V_3, et on veut prouver que leur produit mixte est égal à zéro. Fixons un point 0, et notons $[0A]$, $[0B]$ et $[0C]$ les représentants de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ayant 0 comme origine ; par hypothèse, les quatre points 0, A, B et C sont dans un même plan, que l'on note Π.

Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est alors ou bien nul, ou bien orthogonal au plan Π, et donc à $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0C}$, puisque les points 0 et C sont contenus dans le plan Π.

On en déduit que le produit scalaire entre $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est égal à zéro ; mais ce produit n'est autre que le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0B}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0C}$, ce qui prouve que le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est égal à zéro. $\square$

8. TD1

Dans tous les exercices de cette planche de TD, on suppose que le plan ou l'espace à trois dimensions est muni d'une base orthonormée (directe dans le cas de l'espace à trois dimensions), par rapport à laquelle on considère toutes les coordonnes. Cette base sera notée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, selon les cas.

Exercice 1. *Trouver* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $3\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b}$, *où* $\overrightarrow{a} = (x+y+1)\overrightarrow{i} + (2x+y)\overrightarrow{j}$, *et* $\overrightarrow{b} = (x+y)\overrightarrow{i} + (3x+y+1)\overrightarrow{j}$.

Exercice 2. *Soient les points* $0(0;0)$, $A(4;0)$, $B(2;3)$ *et* $C(6;3)$ *du plan. Le quadrilatère* $0ABC$ *est-il un parallélogramme ?*

Exercice 3. *Déterminer :*
1) si les vecteurs $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *et* $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *sont colinéaires (on dit aussi linéairement indépendants) ou non ;*
2) toutes les valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles les vecteurs*

$$\overrightarrow{v} = (x+1)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k} \text{ et } \overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + (2x+y)\overrightarrow{j} + (1+y)\overrightarrow{k}$$

ne sont pas colinéaires ;
3) si les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *(du point 1)) et* $\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *forment une base de* E_3 *ou non.*

Exercice 4. *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{u} = (m;1)$ *et* $\overrightarrow{v} = (1;m)$, *où* m *est un paramètre.*

Déterminer les valeurs de m *pour lesquelles les deux vecteurs sont colinéaires.*

Même question pour les vecteurs $\overrightarrow{v} = (1;m)$ *et* $\overrightarrow{v} = (m;m^2)$.

Exercice 5. *Déterminer si les vecteurs* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *et* $\overrightarrow{c}$ *forment une base de* E_3 *quand :*
i) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{i}$,
ii) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{i}$.

Soit les quatre vecteurs $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. *Déterminer combien de bases on peut former en choisissant trois parmi ces quatre vecteurs.*

Exercice 6. *Soit* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *et* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. *Trouver un vecteur* $\overrightarrow{c}$ *tel que* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ *soit une base de* E_3.

Exercice 7. *Soit* $\overrightarrow{A} = a\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + (2a-1)\,\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{X} = x\,\overrightarrow{i} + (3x+y)\,\overrightarrow{j} + (x+y)\,\overrightarrow{k}$, *et* $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$.

Trouver toutes les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ *qui font que l'égalité*

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}$$

est fausse, quelles qu'elles soient les valeurs $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. *Calculer les angles :*
1) entre les vecteurs $\overrightarrow{u} : (\sqrt{3}, 2)$ *et* $\overrightarrow{v} : \left(1, 3\sqrt{3}\right)$
2) entre les vecteurs $\overrightarrow{a} : (1, \sqrt{2})$ *et* $\overrightarrow{b} : (\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2)$.

Exercice 9. *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{u} = (1; 0; 0)$ *et* $\overrightarrow{v} = (1; \sqrt{3}; 0)$. *Trouvez un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *de norme égale à* 1 *qui fasse un angle* $\frac{\pi}{3}$ *avec chacun des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

Exercice 10. *Calculez l'angle entre les diagonales de deux faces adjacentes d'un cube (les diagonales partent du même sommet du cube).*

Exercice 11. *Pour quelles valeurs de* t, *les vecteurs :* $\overrightarrow{a} : (\sin(t);\ \cos(t);\ 0)$, $\overrightarrow{b} : (\cos(t);\ -\sin(t);\ 0)$ *et* $\overrightarrow{c} : (0;\ 0;\ 1)$ *forment-ils une base ?*

Exercice 12. *Soit* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *deux vecteurs de* E_3. *Montrer que si* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}$ *pour tout* $\overrightarrow{u} \in E_3$, *alors* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.