Chapitre 2 : Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

1 Introduction

1.1 Notations

Nous introduisons ici quelques notations qui seront utilisées par la suite pour l'écriture d'assertions mathématiques :

— Le symbole « $\forall$ » veut dire « pour tout » ou bien « quel que soit ».
— Le symbole « $\exists$ » veut dire « il existe ».
— Le symbole « $\exists!$ » veut dire « il existe un unique ».
— Le symbole « : » veut dire « tel que ».
— Le symbole « $\Rightarrow$ » veut dire « implique » ou encore « si .... alors ».
— Le symbole « $\Leftrightarrow$ » veut dire « est équivalent à » ou encore « si et seulement si ».

Exemples. *Voici quelques exemples de lecture d'assertions mathématiques :*

1. *« $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 3$ » se lit « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ est strictement supérieur à 3. »*
2. *« $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ » se lit « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, x supérieur ou égal à y implique $f(x)$ supérieur ou égal à $f(y)$, » ou encore « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, si est x supérieur ou égal à y alors $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$, »*
3. *« $\exists x \in \mathbb{R}^- : f(x) \leqslant 1$ » se lit « Il existe x dans $\mathbb{R}^-$ tel que $f(x)$ est strictement plus grand que 1 ».*
4. *« $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ » se lit « Pour tout y dans $\mathbb{R}$, il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que y est égal à $f(x)$. »*
5. *$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ se lit « Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ égal à $f(y)$ implique que x est égal à y » ou encore « Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, si $f(x)$ est égal à $f(y)$ alors x est égal à y ».*
6. *« $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ » se lit « Pour tout x, y dans $\mathbb{R}_+$ x^2 est égal à y^2 si et seulement si x est égal à y. »*
7. *« $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 0$ » se lit « Il existe un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 0. »*

1.2 Ensembles usuels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ possède les sous-ensembles remarquables suivants :

. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels.
. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0.
. $\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers relatifs.
. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$ l'ensemble des rationnels.
. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels.
. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.
. $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.

Remarque : *Rappelons que l'on a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ prenant l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \\ [a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\} \\ ]a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ ]-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\} \\ ]-\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < b\}. \end{array}$$

1.3 Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on utilisera fréquemment les règles de calcul suivantes

$$\begin{array}{rcl} a \times b = 0 & \Leftrightarrow & a = 0 \text{ ou } b = 0. \\ a < b & \Leftrightarrow & (a \leqslant b \text{ et } a \neq b). \\ (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a) & \Leftrightarrow & a = b. \\ (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) & \Rightarrow & a \leqslant c. \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) & \Rightarrow & a + c \leqslant b + d. \\ (a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) & \Rightarrow & a \times c \leqslant b \times c. \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) & \Rightarrow & a \times c \geqslant b \times c. \end{array}$$

2 Fonction d'une variable réelle

Dans toute la suite, on considère E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (ce que l'on note respectivement $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$).

2.1 Définitions

Définition *Une fonction d'une variable réelle c'est la donnée de trois choses :*

1. *Un ensemble de départ E.*
2. *Un ensemble d'arrivée F.*
3. *Un procédé qui transforme tout élément de E en un élément de F.*

Remarque : *Dans toute la suite on écrira « fonction » plutôt que « fonction d'une variable réelle » par soucis de clarté.*

Notation Une fonction f sera notée

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x), \end{array}$$

où pour tout $x \in E$, $f(x)$ l'**image** de x par la fonction f.

Définition *Si $f : E \to F$ est une fonction, l'ensemble E est appelé* ***domaine de définition*** *de la fonction f et sera noté $\mathcal{D}_f$. Autrement dit, le domaine définition ne contient que des éléments qui possèdent une image par le procédé de transformation $x \mapsto f(x)$.*

Remarque : *En pratique, lorsque l'on a une fonction $f : E \to F$ pour déterminer $\mathcal{D}_f$, on cherche :*
. Les éléments $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ n'existe pas et on les « enlève » de $\mathbb{R}$ (lorsque l'on a une fraction dans l'expression de la fonction et un dénominateur susceptible de s'annuler...).
. Ou bien les éléments x pour lesquels $f(x)$ existe (si on a une expression qui contient une racine, un logarithme...).

Exemples. *Soient E_1, E_2 et E_3 trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Déterminer les domaines maximaux de définition E_1, E_2 et E_3 des fonctions f_1, f_2 et f_3 suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : E_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : E_2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_3 : E_3 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{array}$$

. $1/x$ *n'est pas défini seulement lorsque $x = 0$, ainsi, $E_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
. $\sqrt{x+1}$ *est défini lorsque $x + 1 \geqslant 0$ c'est à dire pour $x \geqslant -1$. On en déduit que $E_2 = [-1, +\infty[$.*
. $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *est défini lorsque*

$$\begin{array}{rcl} x - 2 \geqslant 0 \textit{ \textbf{et} } \sqrt{x-2} \neq 0 & \Leftrightarrow & x \geqslant 2 \textit{ \textbf{et} } x \neq 2 \\ & \Leftrightarrow & x \in [2, +\infty[\textit{ \textbf{et} } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ & \Leftrightarrow & x \in \cap[2, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}). \end{array}$$

On en déduit que $E_3 =]2, +\infty[$.

Proposition 2.1 *Deux fonctions $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ sont* ***égales*** *si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :*

1. *$E_1 = E_2$ (égalité des ensembles de départ).*
2. *$F_1 = F_2$ (égalité des ensembles d'arrivée).*
3. *$\forall x \in E_1 = E_2$, $f_1(x) = f_2(x)$ (égalité du processus de transformation).*

Si ces trois propriétés sont vérifiées, on note alors $f_1 = f_2$.

Exemple. *Les fonctions*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

ne sont pas égales car les ensembles de départ ne sont pas les mêmes.

Définitions. *Soient E, f, G, H des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions.*

1. *Si l'espace d'arrivée F de f est inclus dans l'espace de départ G de g alors on définit la* ***fonction composée*** *$g \circ f$ par*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & H \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

2. *Si l'espace d'arrivée H de g est inclus dans l'espace de départ E de f alors on définit la* ***fonction composée*** *$f \circ g$ par*

$$f \circ g : \begin{array}{rcl} G & \to & F \\ x & \mapsto & f(g(x)). \end{array}$$

Remarques :

1. *La condition $F \subset G$ est* ***essentielle*** *pour que l'image par la fonction g de $f(x)$ ait toujours un sens. De même, la condition $H \subset E$ est* ***essentielle*** *pour que l'image par la fonction f de $g(x)$ ait toujours un sens.*
2. *La composition $g \circ f$ consiste à appliquer f à x puis g à $f(x)$ alors que la composition $f \circ g$ consiste à appliquer g à x puis f à $g(x)$.*
3. *Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit les fonctions car en général les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas égales. Il existe même des cas pour lesquels $f \circ g$ existe alors que $g \circ f$ n'existe pas.*

Exemples. *On considère les fonctions :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1,1], \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Peut-on définir les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ f$? Si oui donnez-en la définition.

1. *$g \circ f$: $[-1,1]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$ donc $g \circ f$ n'a pas de sens.*
2. *$f \circ g$: on a $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ a un sens et est définie par* $f \circ g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(\sqrt{x}). \end{array}$
3. *$g \circ h$: $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$ donc $g \circ h$ a un sens et est définie par* $g \circ h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2}. \end{array}$
4. *$h \circ f$: $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ donc $h \circ f$ a un sens et est définie par* $h \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (\sin(x))^2. \end{array}$

2.2 Antécédent, graphe, image directe et image réciproque

Définitions. *Soient $f : E \to F$ une fonction et B un sous-ensemble de F.*

— *On appelle* ***antécédent*** *de $y \in F$ par la fonction f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On dit alors que y est l'****image*** *de x par la fonction f.*

— ***L'image de*** *f est le sous-ensemble de l'espace d'arrivée F noté $\Im(f)$ défini par*

$$\Im(f) = \{y \in F : \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

— ***L'image réciproque*** *de B par f est le sous-ensemble de l'espace de départ E noté $f^{-1}(B)$ défini par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Remarque : *Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\Im(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\Im(f)$ est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un élément de F. $\Im(f)$ est le sous-ensemble des éléments de l'espace d'arrivée F qui ont au moins un antécédent par f.*

Définition *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite* ***bijective*** *si tout point y de l'espace d'arrivée F possède* <u>*exactement*</u> *un antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f.*

Remarque : *La définition de la bijectivité d'une fonction se traduit à l'aide de quantificateurs de la façon suivante : $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$.*

Exemples.

1. *La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car $1 \in \mathbb{R}_+$ admet deux antécédents -1 et 1 dans l'espace de départ $\mathbb{R}$. En effet, $f(1) = f(-1) = 1$.*
2. *La fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans l'espace de départ $\mathbb{R}_+$. En effet, il n'existe pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ pour -1 car l'équation $g(x) = -1$ qui s'écrit $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction $h : \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective car pour tout y dans l'espace d'arrivée $[0,4]$, il existe un unique antécédent $x = \sqrt{y}$ dans l'espace de départ $[0,2]$.*
4. *La fonction $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ n'est pas bijective car $0 \in [-1,1]$ admet au moins deux antécédents dans son espace de départ : $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.*
5. *La fonction $l : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ n'est pas bijective car $2 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans l'espace de départ $[0,\pi]$. En effet, l'équation $l(x) = 2$ qui s'écrit $\cos(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car pour tout x dans $\mathbb{R}$ on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.*

En pratique on utilise souvent le résultat suivant pour montrer qu'une application est bijective, bien souvent en dressant le tableau de variations de la fonction :

> **Théorème 2.1** *Si une fonction $f : E \to F$ est strictement croissante et telle que $F = \Im(f)$ alors elle est bijective.*

Remarques :
. Le théorème précédent fonctionne aussi si on suppose f strictement décroissante au lieu de strictement croissante.
. Pour toute fonction $f : E \to F$, si $F = \Im(f)$ on dit que f est à valeurs dans son image.

Exemple. *La fonction $h : \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective car elle est strictement croissante et à valeurs dans son image (en effet, $\Im(h) = h([0,2]) = [0,4]$).*

L'intérêt principal que nous apporte le caractère bijectif d'une application f est qu'il nous permet de définir une nouvelle fonction appelée fonction réciproque de f.

Définition *Si une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors il existe une fonction appelée « fonction réciproque » de f, notée f^{-1} et définie par*

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \textit{l'unique } x \in E \textit{ tel que } y = f(x). \end{array}$$

On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit bien défini de manière unique.

Exemples.

1. *D'après l'exemple précédent, la fonction $h : \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective, elle admet donc une fonction réciproque. Pour tout y dans $[0,4]$, l'équation $y = h(x)$ qui s'écrit $y = x^2$ admet pour unique solution $x = \sqrt{y} \in [0,2]$. La fonction réciproque de h est définie par $h^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,4] & \longrightarrow & [0,2] \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$.*

2. *On considère l'application $f : \begin{array}{ccc}]-\infty,2] & \longrightarrow & \mathcal{I}(f) \\ x & \longmapsto & x^2-4x+3. \end{array}$*
Déterminer $\mathcal{I}(f)$, montrer que f est une bijection et calculer f^{-1}.
Pour tout x dans $]-\infty,2]$, $f'(x) = 2x-4 \leqslant 0$ et donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ 2
f'	$-$
f	$+\infty$ $\searrow$ -1

D'après le tableau, f est strictement décroissante et $\mathcal{I}(f) = [-1,+\infty[$, elle est donc bijective de $]-\infty,2]$ dans $\mathcal{I}(f)$. Soit $y \in [-1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2-4x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+(3-y) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16-4(3-y) = 4+4y \geqslant 0$ car $y \geqslant -1$. On a donc deux solutions possibles :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{4+4y}}{2} = 2-\sqrt{1+y} \leqslant 2$$

et

$$x_2 = \frac{4+\sqrt{4+4y}}{2} = 2+\sqrt{1+y} \geqslant 2.$$

Comme on cherche la solution dans l'ensemble de définition de $]-\infty,2]$ de f, x_2 ne convient pas, mais x_1 convient. Conclusion : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \longrightarrow &]-\infty,2] \\ y & \longmapsto & 2-\sqrt{1+y}. \end{array}$

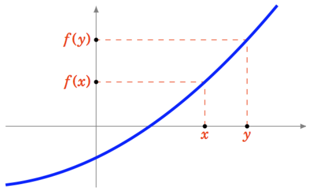
Proposition 2.2 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une fonction <u>bijective</u> et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors*

$$\forall x \in E,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \textit{et} \quad \forall y \in F,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

2.3 Monotonie

Définitions. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. On dit que :*

. *f est <u>croissante</u> sur E si $\forall x, y \in E, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.*
. *f est <u>strictement croissante</u> sur E si $\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*
. *f est <u>décroissante</u> sur E si $\forall x, y \in E, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.*
. *f est <u>strictement décroissante</u> sur E si $\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

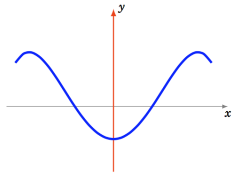


(Fonction strictement croissante)

2.4 Parité et périodicité

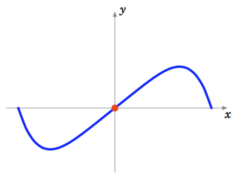
Définitions. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$ ou $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*

. *f est <u>paire</u> si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.*



Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

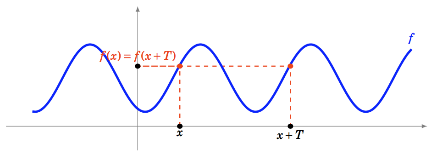
. *f est <u>impaire</u> si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.*



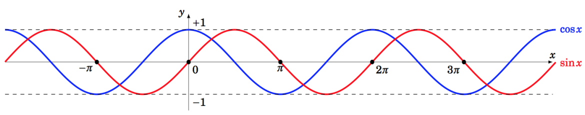
Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

Définition *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite <u>périodique</u> de période T si*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).}$$



Exemple. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*



2.5 Continuité et dérivabilité d'une fonction

On note dans la suite I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définitions. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.*
. On dit que f est continue au point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
*. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I. . On dit que f est **dérivable au point** a si la fonction*

$$\begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a. Si elle existe cette limite est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a.

. On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si f est dérivable en tout point de J.
. On appelle ***domaine de dérivabilité*** *de f l'ensemble $\tilde{I} = \{x \in I : f \text{ est dérivable en } x\}$. On note la fonction dérivée de f par f' :* $\begin{array}{ccc} \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$.

Exemple. *La fonction f :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 2x_0 < \infty.$$

On a même montré que la dérivée de f en x_0 vaut $2x_0$, autrement dit $f'(x) = 2x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement, on note*

$$f^{(0)} = f, \ f^{(1)} = f', \ f^{(2)} = f'' \ ... \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.

Propriétés *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, *si* $f(x) \neq 0$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *si* $g(x) \neq 0$.

Proposition *(Dérivation de composée de fonctions)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles I et J et telles que $\mathcal{I}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et on a pour tout $x \in I$

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).}$$

Exemples.

1. *$f : x \mapsto e^{x^2+3x+1}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f = f_1 \circ f_2$ où $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto x^2+3x+1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$f'(x) = f_2'(x) \times f_1'(f_2(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x+1}.$$

2. *$g : x \mapsto \sin(2x+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $g = g_1 \circ g_2$ où $g_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $g_2 : x \mapsto 2x+1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$g'(x) = g_2'(x) \times g_1'(g_2(x)) = 2\cos(2x+1).$$

Corollaire *(Dérivation de la fonction réciproque)*
Soient $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $y \in J$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

Exemple. *Nous avons vu dans un exemple précédent que la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *admet pour réciproque* $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,4] & \longrightarrow & [0,2] \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$*. Pour tout* x *dans* $I =]0,2[$*, on a* $f'(x) = 2x \neq 0$ *et* $f(I) =]0,4[$*. D'après le corollaire précédent,* f^{-1} *est dérivable sur* $]0,4[$ *et on a*

$$\forall y \in]0,4[, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

on retrouve bien la formule de la dérivée que l'on connait pour la fonction racine carrée.

Définition *(Tangente en un point)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en un point* $a \in I$*. Une équation de la tangente à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *au point* $(a, f(a))$ *est donnée par*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

2.6 Étude des variations d'une fonction

Proposition *(Sens de variation d'une fonction)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*.*

1. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante.*
2. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante.*
3. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est une fonction constante.*
4. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante.*
5. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante.*

Remarque : *La réciproque des points* 4. *et* 5. *est fausse. Par exemple, la fonction* $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et pourtant sa dérivée s'annule en* 0*.*

2.7 Théorèmes liés à la continuité et à la dérivabilité d'une fonction

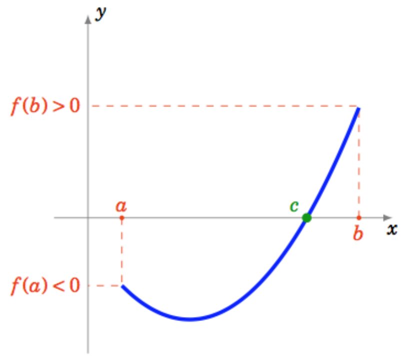
Nous présentons ici des résultats fondamentaux liés à la continuité et la dérivabilité d'une fonction.

Théorème 2.2 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors pour tout* y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = y$*.*

Exemple. *La fonction cosinus* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est continue. D'après le théorème, pour tout* y *compris entre* $\cos(0) = 1$ *et* $\cos(\pi) = -1$*, il existe* c *dans* $[0,\pi]$ *tel que* $\cos(c) = y$*. Cela signifie que tout élément de* $[-1,1]$ *admet au moins un antécédent dans* $[0,\pi]$ *par la fonction cosinus.*

Corollaire 2.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\boxed{\text{Si } f(a) \times f(b) < 0 \text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$$



Exemple. *Montrer que l'équation $x^3 + 5x + 2 = 0$ admet au moins une solution dans $[-2, 2]$.*
La fonction $f : x \mapsto x^3 + 5x + 2 = 0$ est continue sur l'intervalle fermé $[-2, 2]$. De plus $f(0) = 2 > 0$ et $f(-1) = -4 < 0$, alors $f(0) \times f(-1) < 0$ et d'après le TVI il existe $c \in] - 1, 0[$ tel que $f(c) = 0$. Comme $] - 1, 0[\subset [-2, 2]$, l'équation $x^3 + 5x + 2 = 0$ admet bien au moins une solution c dans $[-2, 2]$.

Théorème 2.3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

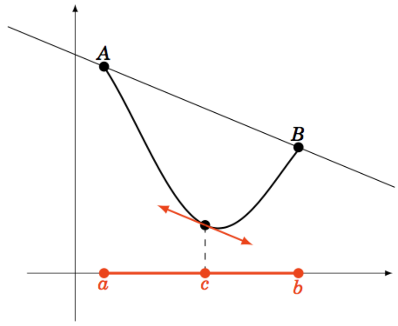
Remarques :

1. *Attention, la réciproque de ce théorème est fausse : si une fonction est continue en un point, elle peut ne pas être dérivable en ce point. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$
est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
En effet, le taux d'accroissement en 0 vérifie :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & \text{si} \quad x < 0. \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, les limites à droite et à gauche de 0 étant différentes, il n'y a pas de limite en 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 0$.
2. *En pratique on utilise la contraposée de ce théorème qui s'énonce comme suit : « Si une fonction n'est pas continue en un point alors elle n'est pas dérivable en ce point. »*

Théorème 2.4 *(Théorème des accroissements finis)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Remarque :

Géométriquement, ce théorème assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Exemple. *Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant x+1$. Pour $x = 0$ l'inégalité est trivialement vérifiée. Fixons x dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_x dans $]0, x[$ tel que*

$$e^x - e^0 = e^{c_x}(x - 0).$$

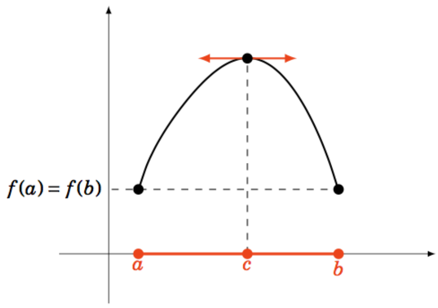
Or par croissance de la fonction exponentielle, comme $c_x > 0$ on obtient $e^{c_x} > e^0$ et donc

$$e^x - e^0 \geqslant e^0(x - 0),$$

ce qui donne bien $e^x \geqslant x + 1$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème des accroissements finis.

> **Théorème 2.5** *(Théorème de Rolle)*
> *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*
> — *f est continue sur $[a, b]$.*
> — *f est dérivable sur $]a, b[$.*
> — *$f(a) = f(b)$.*
> *Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*



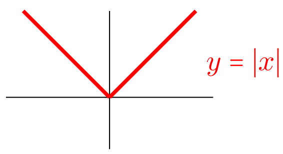
Remarque : *Géométriquement, le théorème de Rolle assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.*

3 Fonctions usuelles

3.1 La valeur absolue

Définition *La fonction **valeur absolue** notée $|\,.\,|$ est définie par :*

$$\begin{aligned} |\,.\,| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Remarque : *Sur la droite numérique, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y, en particulier, $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.*

Proposition 3.1 *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}$*

1. $|x| \geqslant 0$; $\quad |-x| = |x|$ *et* $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
2. $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. $|xy| = |x|.|y|$.
4. $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$.
5. $\forall b \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant b \text{ ou } x \leqslant -b & \text{si} \quad b \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{si} \quad b < 0. \end{cases}$
6. ***L'inégalité triangulaire*** : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
7. ***Seconde inégalité triangulaire*** : $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

Preuve. Montrons l'inégalité triangulaire : on considère x et y deux réels quelconques. On a

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ et } -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$-\big(|x| + |y|\big) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

et en utilisant le point 4), avec $r = |x| + |y| \geqslant 0$ on en déduit que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
Montrons maintenant la deuxième inégalité triangulaire : puisque $x = x - y + y$ en appliquant l'inégalité triangulaire on a

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

En intervertissant le rôle de x et y on a aussi $|y| - |x| \leqslant |y - x|$. Comme $|y - x| = |x - y|$, on a donc

$$|y| - |x| \leqslant |x - y| \Leftrightarrow -|x - y| \leqslant |x| - |y|.$$

Finalement,

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

et en appliquant le point 4) avec $r = |x - y| \geqslant 0$, on a finalement $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$. ■

Remarque : *Pour tout $b \in \mathbb{R}_-^*$, l'inéquation $|x| \leqslant b$ n'a pas de solution !*

3.2 Fonction polynomiale

Définition *Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \end{aligned}$$

est appelée fonction polynôme de degré n. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ donné par

$$\begin{aligned} P' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=1}^{n} k \times a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + ... + n \times a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Remarque : *La dérivée de* $P : x \mapsto x^k$ *est donc* $P' : x \mapsto k \times x^{k-1}$.

Définition *Soit* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un polynôme de degré* n. *On dit que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est une* ***racine*** *ou un* ***zéro*** *de* P *si* $P(\alpha) = 0$.

Exemple. *Le polynôme* P *défini pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $P(x) = x^2 + x - 2$ *admet-il des racines ? On calcule le discriminant* $\Delta = 9$ *et on trouve deux racines* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -2$.

Proposition 3.2 *Soit* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un polynôme de degré* n. *Alors :*

. P *possède au plus* n *racines.*

. α *est une racine de* $P \Leftrightarrow$ *Pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$, $P(x)$ *se factorise par* $(x - \alpha)$.

Remarque : *Lorsque* $n = 2$, *si* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *admet deux racines* x_1 *et* x_2 *alors une factorisation de* P *est* $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple. 1 *et* -2 *sont racines du polynôme* P *défini pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$ *par* $P(x) = x^2 + x - 2$, *ainsi* $P(x)$ *se factorise par* $(x - 1)$ *et* $(x + 2)$ *de la façon suivante* $P(x) = (x - 1)(x + 2)$.

3.3 Fonction logarithme

Définition *On appelle logarithme népérien l'unique fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *vérifiant* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\ln(1) = 0$.

Propriétés *(Règles de calcul)*
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) \\
\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\
\ln(a^n) &= n\ln(a) \\
\ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) \\
\ln\left(\frac{1}{a^n}\right) &= -n\ln(a)
\end{aligned}$$

Proposition *(Limites usuelles)*

$$\begin{aligned}
&. \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty. \\
&. \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty. \\
&. \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.
\end{aligned}$$

Théorème *La fonction logarithme est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$.

3.4 Fonction exponentielle

Définition *La fonction exponentielle notée* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est définie comme la réciproque de la fonction logarithme* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. *Elle vérifie* $\forall x \in \mathbb{R}\ (\exp(x))' = \exp(x)$.

Remarque : *On utilisera la notation* $\exp(x) = e^x$. *Comme elle est la réciproque de la fonction logarithme, on en déduit que la fonction exponentielle vérifie*

$$\boxed{\forall x > 0,\ e^{\ln x} = x \textit{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ \ln(e^y) = y.}$$

Propriétés *(Règles de calcul)*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} e^0 &=& 1, \\ e^{x+y} &=& e^x.e^y, \\ e^{-x} &=& \dfrac{1}{e^x}, \\ e^{nx} &=& (e^x)^n \\ e^{-nx} = (e^x)^{-n} &=& \dfrac{1}{(e^x)^n} = \dfrac{1}{e^{nx}}. \end{array}$$

Proposition *(Limites usuelles)*

$$\begin{array}{rcl} .\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x &=& 0. \\ .\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x &=& +\infty. \end{array}$$

Théorème *La fonction exponentielle une bijection continue, dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Définition *Soit* $a > 0$. *On définit la fonction* ***exponentielle de base*** a *de la manière suivante*

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \mathbb{R} &\to&]0, +\infty[\\ x &\mapsto& a^x = e^{x \ln a}. \end{array}$$

3.5 Fonctions puissances et leurs réciproques

Définition *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction*

$$\begin{array}{rcl} u_\alpha :]0, +\infty[&\to&]0, +\infty[\\ x &\mapsto& x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}. \end{array}$$

s'appelle ***fonction puissance***. *Elle admet pour dérivée la fonction* $u'_\alpha\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $u'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ *pour tout* $x > 0$.

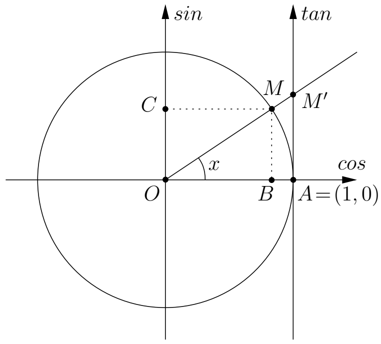
Proposition *La fonction puissance* $u_\alpha : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ *est une bijection continue strictement croissante si* $\alpha > 0$ *et strictement décroissante si* $\alpha < 0$. *Elle admet pour réciproque la fonction*

$$u_\alpha^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}.$$

Corollaire *Lorsque* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geqslant 2$, *la réciproque de la fonction* $x \mapsto x^n$ *est la fonction* $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, *appelée* ***racine*** n***-ième***. *Lorsque* n *est pair, elle est définie de* $[0, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$, *et lorsque* n *est impair, elle est définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

3.6 Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}\cos(x) &= OB\\ \sin(x) &= MB = OC\\ \tan(x) &= AM' = \frac{MB}{OB}\end{aligned}$$



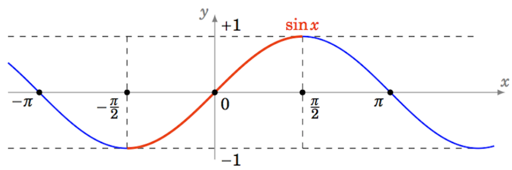
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBM on a :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés *La fonction sinus* $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.
. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$ *(elle est impaire).*
. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ *(elle est 2π-périodique).*
. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.
. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.
. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.



Proposition *La fonction sinus* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *est bijective.*

Définition *On appelle fonction* ***arccsinus****, notée* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, la fonction réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

Remarque : *Par définition, pour tout* $y \in [-1,1]$, $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *tel que son sinus soit égal à* y*. Ceci nous donne la relation suivante :*

$$\boxed{\textit{Si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y).}$$

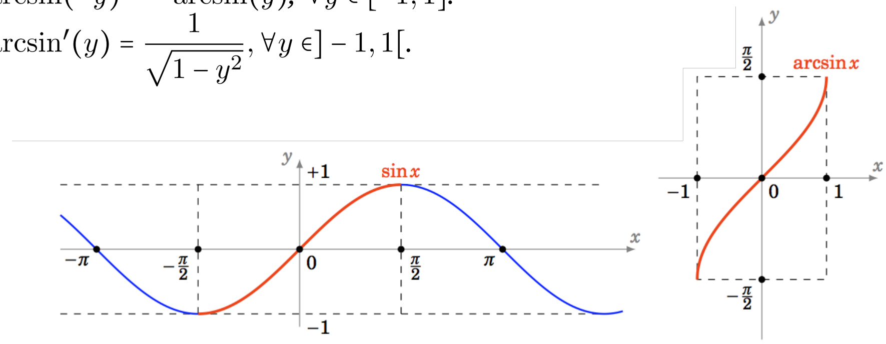
Exemple. *Que vaut* $\arcsin(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arcsin(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \textit{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Propriétés *La fonction arcsinus est continue et bijective de* $[-1,1]$ *dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

- $\arcsin(\sin(x)) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\sin(\arcsin(y)) = y, \forall y \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(-y) = -\arcsin(y),\ \forall y \in [-1, 1]$.
- $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in]-1, 1[$.

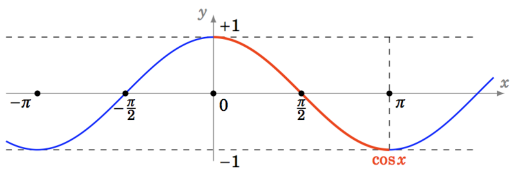


Exemple. *Que vaut* $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3}))$ *?*
On serait tenté de répondre $\frac{13\pi}{3}$ *mais ce n'est pas la bonne réponse car la fonction* $\arcsin$ *est à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et* $\frac{13\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *! On a*

$$\sin(\frac{13\pi}{3}) = \sin(\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \sin(4\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}).$$

Ainsi, $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ *car* $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Propriétés *La fonction cosinus* $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie les propriétés suivantes :*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ *(elle est paire).*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ *(elle est* 2π*-périodique).*
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.



Proposition *La fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *est bijective.*

Définition *On appelle fonction* ***arccosinus****, notée* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$*, la fonction réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Remarque : *Par définition, pour tout* $y \in [-1, 1]$, $\arccos(y)$ *est l'unique angle compris* 0 *et* π *tel que son cosinus soit égal à* y*. Ceci nous donne la relation suivante :*

$$\boxed{\textit{Si } x \in [0, \pi],\ \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y).}$$

Exemple. *Que vaut* $\arccos(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos(\theta) = \frac{1}{2}.$$

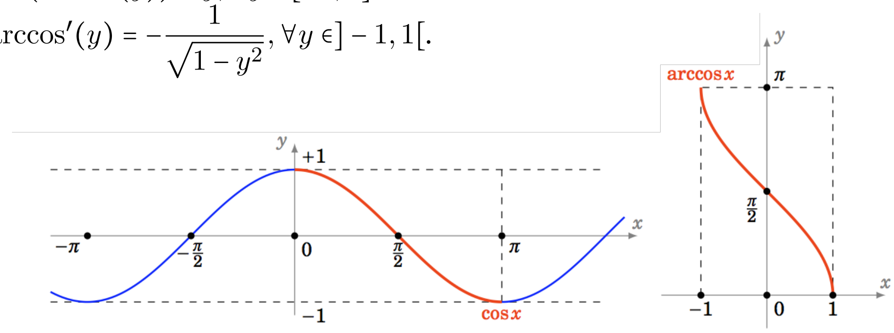
Par identification, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Propriétés *La fonction arccosinus est continue et bijective de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$*, dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

. $\arccos(\cos(x)) = x, \forall x \in [0,\pi]$

. $\cos(\arccos(y)) = y, \forall y \in [-1,1]$.

. $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in]-1,1[$.



Exemple. *Que vaut* $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3}))$ *?*
On serait tenté de répondre $\frac{13\pi}{3}$ *mais ce n'est pas la bonne réponse car la fonction* $\arccos$ *est à valeurs dans* $[0,\pi]$ *! On a*

$$\cos(\frac{13\pi}{3}) = \cos(\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos(4\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}).$$

Ainsi, $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ *car* $\frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$.

Définition *La fonction tangente* $\tan : D_{\tan} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *avec*

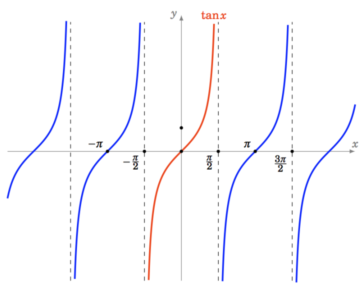
$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

. $\forall x \in D_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

. $\forall x, -x \in D_{\tan}, \tan(-x) = -\tan(x)$ *(elle est impaire).*

. $\forall x \in D_{\tan}, \tan(x+\pi) = \tan(x)$ *(elle est* π*-périodique).*



Proposition *La fonction tangente* $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *est bijective.*

Définition *On appelle fonction* ***arctangente****, notée* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*, la fonction réciproque de la fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

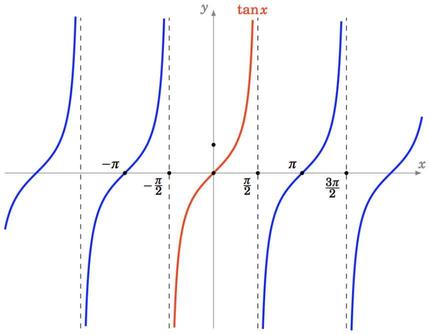
Remarque : *Par définition, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*,* $\arctan(y)$ *est l'unique angle compris (strictement) entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *tel que sa tangente soit égale à* y*. Ceci nous donne la relation suivante :*

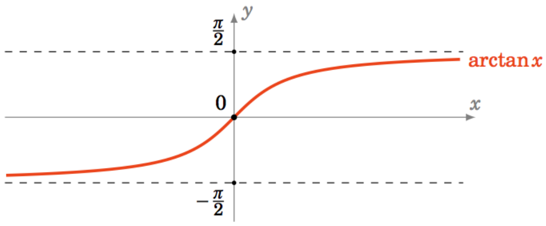
$$\boxed{\textit{Si } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y).}$$

Propriété *La fonction arctangente est continue, bijective et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *et vérifie :*

. $\arctan(\tan(x)) = x, \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

- $\tan(\arctan(y)) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
- $\arctan(-y) = -\arctan(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
- $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.





Exemple : En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Considérons $x \in]-\pi, \pi[$ et posons $t = \tan(\frac{x}{2})$. Comme $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\arctan(t) = \arctan(\tan(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2}.$$

Par ailleurs

$$\begin{array}{rcl}
\cos(x) & = & \cos(2\arctan(t)) \\
 & = & 2\cos^2(\arctan(t)) - 1 \\
 & = & \dfrac{2}{1+\tan^2(\arctan(t))} - 1 \quad \text{car } 1+\tan^2(X) = \dfrac{1}{\cos^2(X)}, \ \forall X \in D_{\tan} \\
 & = & \dfrac{2}{1+t^2} - 1 \\
 & = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{array}$$

Maintenant, si $x \in]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$\cos(x) = \cos(x - 2k\pi) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ où } t = \tan(\frac{x-2k\pi}{2}) \text{ car } x - 2k\pi \in]-\pi, \pi[.$$

Or $\tan(\dfrac{x-2k\pi}{2}) = \tan(\dfrac{x}{2} - k\pi) = \tan(\dfrac{x}{2})$ car la fonction $\tan$ est π-périodique. On a donc bien $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ avec $t = \tan(\frac{x}{2})$.

4 Techniques de calcul de limites

Il existe des cas où l'on ne peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :

$$\text{« } +\infty - \infty \text{ », « } 0 \times \infty \text{ », « } \tfrac{\infty}{\infty} \text{ », « } \tfrac{0}{0} \text{ », « } 1^\infty \text{ » et « } \infty^0 \text{ ».}$$

Nous allons voir dans cette section plusieurs techniques pour lever ces indéterminations.

4.1 Fractions rationnelles

Règle n°1 : La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés respectifs du numérateur et du dénominateur. On a 3 cas possibles :

1. Le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^3-5}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

2. Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+3x^3-5}{5x^4+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4}{5x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

3. Le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Règle n°2 : La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degrés respectifs du numérateur et du dénominateur.

- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^4+3x^3-5}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to0} \frac{-5}{1} = -5$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3x^4+3x^3}{5x^4+2x} = \lim_{x\to0} \frac{3x^3}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{3}{2}x^2 = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{-x^2+2x}{x^3+3x} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{3x} = \lim_{x\to0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{-x^2+2x}{x^3+3x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2}{3x} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{-x^2+2x}{x^3+3x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{2}{3x} = -\infty.$

Rappel : La notation « $x \to 0^+$ » signifie que x tend vers 0 par valeur supérieure, c'est à dire x tend vers 0 et $x > 0$. De façon analogue, la notation « $x \to 0^-$ » signifie que x tend vers 0 par valeur inférieure, c'est à dire x tend vers 0 et $x < 0$.

4.2 Limite de fonctions composées

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}}$ =? On a $\lim_{x\to0^+} \frac{5x+1}{x^2+3x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{3x} = +\infty$. Comme $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}} = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$ =? On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4}{5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{5} = +\infty$. Comme $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right) = +\infty$.

4.3 Astuces récurrentes

Ici sont listés des exemples d'astuces pour lever des indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ » et « $\infty - \infty$ ».

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4}$ =? On a là une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». Comme 1 annule $2x^2-x-1$, alors on peut factoriser $2x^2-x-1$ par $x-1$ et de la même façon $3x^2-7x+4$ se factorise par $x-1$. Après division euclidienne on trouve

$$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1) \text{ et } 3x^2-7x+4=(x-1)(3x-4)$$

et alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-4)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{3x-4} = \dfrac{3}{-1} = -3.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ =? On a là une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». On voit que 0 annule le dénominateur et le numérateur, on voudrait factoriser par $x-0$ mais à ce stade on ne peut pas. En présence d'une différence de racines $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ le réflexe à avoir est de multiplier et diviser notre expression par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1+x^2})^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}$ =? On a là une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ ». On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\
&= 0^+.
\end{aligned}$$

4.4 Théorème des gendarmes

Théorème *Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ et f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g \leqslant h$.*

$$\textit{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \textit{ alors } \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

Corollaire *Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ telles que $f \leqslant g$.*

1. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
2. *Si* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ ***alors*** $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque : *Les deux résultats précédents s'appliquent aussi pour la recherche d'une limite en* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Exemple. *Calculer la limite en* $+\infty$ *de* $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array}$. *Pour tout* $x > 0$ *on a*

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, *on en déduit d'après le théorème des gendarmes que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4.5 Croissances comparées

Proposition 4.1 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Preuve. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x + 1$ sur $]0,+\infty[$, on montre que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$, et donc $\ln(x) \leqslant x$. En particulier on obtient $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leqslant 1$ pour tout $x > 0$. Si $x \geqslant 1$ on a

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

En utilisant cet encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0^+,$$

on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. ■

Proposition 4.2 *Si* $b > 0$ ***alors*** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0^+$ ***et*** $\lim_{x\to 0^+} x^b \ln(x) = 0$.

Preuve. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{\ln(x)}{x^b} = \frac{1}{b}\frac{\ln(x^b)}{x^b}$. Comme $b > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$, ainsi en utilisant la proposition précédente, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b}\frac{\ln(x^b)}{x^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{b}\frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x^b} = (\frac{1}{x})^b$, donc $x^b \ln(x) = \frac{\ln(x)}{(1/x)^b} = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^b}$. On a $\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y^b} = 0^+$ donc $\lim_{x\to 0^+} x^b \ln(x) = 0$. ■

4.6 Règle de l'Hospital

Nous introduisons ci-dessous une technique qui permet de lever les indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ ». Attention, avant d'utiliser la méthode qui suit, on commence par vérifier si on ne peut pas simplifier l'expression de la fraction, en factorisant par exemple numérateur et dénominateur par la même quantité !

Proposition 4.3 *(Règle de l'Hospital)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x_0) \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Si } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \textit{ alors } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Remarque : *Ce résultat s'applique également pour lever des indéterminations du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », c'est à dire lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.*

Exemple. *Calculer $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x)}$. On a*

- $I =]\frac{3}{4}, 2[$.
- $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ *est dérivable sur I,* $f(1) = 0$ *et* $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 1}$.
- $g(x) = \ln(x)$ *est dérivable sur I,* $g(1) = 0$ *et* $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\forall x \in I \setminus \{1\}$, $g'(x) \neq 0$.

De plus

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 1} \times x = \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3$.

A Formulaire

FONCTIONS USUELLES

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x}$, $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt[n]{x}$, $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Dérivées de composées usuelles

On considère une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Fonction	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	I	$nu'u^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\dfrac{1}{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\sqrt{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \geqslant 0\}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$
e^u	I	$u'e^u$	I
$\ln(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$	$\dfrac{u'}{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$
$\cos(u)$	I	$-u'\sin(u)$	I
$\sin(u)$	I	$u'\cos(u)$	I
$\tan(u)$	$I \cap \left\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$u'(1 + \tan^2(u)) = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$I \cap \left\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arccos(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arctan(u)$	I	$\dfrac{u'}{1 + u^2}$	I

B Exercices

Remarque : *Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.*

Exercice 1. Résoudre sur leur domaine de validité les équations et inéquations suivantes :

- $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x+7}$;
- $\sqrt{x+21} \leqslant \sqrt{2x+3}$;
- $\sqrt{2x+1} = x-1$;
- ♣ $\sqrt{x^2-8} - 2x = -5$;
- ♣ $\sqrt{x(10-x)} = \sqrt{-3-x}$;
- $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0$;
- $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x}$;
- ♣ $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$;
- ♣ $-x+3 < x+1 < -3x+7$;
- $|x+2| = \dfrac{4}{3}$;
- $\left|\dfrac{3}{2} - x\right| = 3$;
- $|x-2| = 2-x$;
- ♣ $|x| + 5 = -1$;
- ♣ $|5-4x| = 3x-2$.

Exercice 2. Donner les domaines maximaux de définition dans $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \sqrt{x-4}\sqrt{x+6}$;
- $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-3}$;
- $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;
- $f_4(x) = \sqrt{x-x^2}$;
- $f_5(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2-2x}$;
- $f_6(x) = \ln(2x-1-x^2)$;
- ♣ $f_7(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$;
- ♣ $f_8(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
- ♣ $f_9(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$;
- ♣ $f_{10}(x) = \sqrt{-1-x^2}$;
- ♣ $f_{11}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$;
- ♣ $f_{12}(x) = \dfrac{\cos(x)+\cos^2(x)}{x+\sin(x)}$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

• $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; • $f_2(x) = e^{-x}+e^{x}$; • $f_3(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$; • $f_4(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$; • $f_5(x) = |x+1|+|x-1|$.

Exercice 4. On considère les fonctions $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$, $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2 \end{array}$.

1. Déterminer si les compositions $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ g$ sont possibles.
2. Parmi les compositions précédentes, lesquelles sont commutatives et lesquelles ne le sont pas ?

Exercice 5. ♣ On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad k : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Peut-on définir les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ k$ et $k \circ h$? Si oui, les déterminer.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$, vérifier que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ puis déterminer sa fonction réciproque f^{-1} :

- $f(x) = e^{e^{x+1}}$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f(x) = x^2 - 1$ et $I = [1, +\infty[$;
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $I =]-\infty, 2]$;
- $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $I =]-2, +\infty[$;
- $\clubsuit$ $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$ et $I = [\frac{-3}{2}, +\infty[$;
- $\clubsuit$ $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $I =]-\infty, 0]$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
- $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$;
- $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
- $\cos(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$;
- $\clubsuit$ $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$;
- $\clubsuit$ $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 8.

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et une formule pour $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Donner une expression de $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. Pour tout x qui convient, donner une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

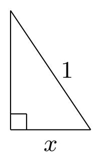
Exercice 9. Calculer

- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$;
- $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos\left(4\pi\right)\right)$;
- $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$.

Exercice 10. Trouver toutes les valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ telles que $\sin(x) + \cos(x) \geqslant 1$.

Exercice 11. $\clubsuit$ Montrer que, $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Indication : on pourra séparer la preuve en cinq cas : $x = -1, 0, 1$, $x \in]0, 1[$ *puis* $x \in]-1, 0[$. *Dans le cas où* $x \in]0, 1[$, *on pourra utiliser le triangle rectangle ci-contre.*



Exercice 12. Calculer lorsqu'elles existent les limites en 0, $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{5x - 2}$;
- $g(x) = \dfrac{-3x^4 + 5x^3}{x^4 + x^2}$;
- $h(x) = \dfrac{2x^2}{3x - 1} - x + 1$.

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-x+3}{2x^2+3x-1}$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x}$.

♣ $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$.

♣ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^3+1)}{x^2+1}$.

♣ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{x-2}$.

♣ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

♣ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$.

♣ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.

Exercice 14. On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.

Exercice 15. On considère l'application $f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in I.$$

Déterminer le domaine maximal de définition I de f. f est-elle continue sur I ?

Exercice 16. ♣ Étudier la continuité de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 17. ♣ On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18. Déterminer un réel a tel que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1 & \text{si} \quad x < 0, \\ a & \text{si} \quad x = 0, \\ 2+x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Avec la valeur a trouvée, la fonction est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 19. Donner le domaine maximal de définition et de dérivabilité des applications suivantes <u>puis</u> calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+2x+7}$;
- $f_2(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$;
- $f_3(x) = \ln(2x+9)$;
- $f_4(x) = \arcsin(3x+9)$;
- $f_5(x) = \dfrac{1}{x}\arccos(2x+1)$;
- $f_6(x) = \sqrt{x^2+2x-1}\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$;
- $f_7(x) = \ln(1+x^2)$;
- $f_8(x) = \sqrt{e^x-1}$;

♣ $f_9(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+1}}\right)$;

♣ $f_{10}(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x-1}{-3x+5}\right)$;

♣ $f_{11}(x) = \ln(\arctan(3x+1))$;

♣ $f_{12}(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{\ln(x)}}$;

♣ $f_{13}(x) = \ln(3-x^2-2x) + \arctan(\sqrt{3-x})$;

♣ $f_{14}(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

♣ $f_{15}(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

♣ $f_{16}(x) = \arccos(\sin(x))$.

Exercice 20. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\bullet\ f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^2-1}\ ; \quad \bullet\ g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\ ; \quad \bullet\ h : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}\ ; \quad \bullet\ k : x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{x^3}.$$

Exercice 21. Montrer que les équations suivantes ont des solutions dans l'intervalle I donné.
- $\sqrt{x^3+6x+1} = 2$ et $I = [0,+\infty[$;
- $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ et $I = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $x^7 - x^2 + 1 = 0$ et $I = [-2,0]$.

Exercice 22. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, prouver que les équations suivantes admettent au moins une solution dans leurs domaines de définition :

- $x^2 + \ln(x) = 0$;
- $\sin(x) + \cos(x) = \frac{3}{2}$;

♣ $x^{17} = 1 - x^{11}$;

♣ $x^3 + x + \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 23. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les résultats suivants :
- pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \le x$;

♣ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-x^2 \le \cos(x) - 1 \le 0$.