

Mathématiques 1

Portail Marie Curie - Physique Chimie SPI

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Exercice 1.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(3x - \pi)$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)$.
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, prouver que l'équation suivante admet au moins une solution dans $[0, \pi]$:

$$\cos(x) - x^2 = 0.$$

Exercice 2.

On considère la fonction réelle $f : x \mapsto 2\sqrt{x} \arctan(x^2) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur son domaine I de définition maximale.

1. Déterminer I .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
3. Calculer f' .

Exercice 3.

1. Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 des fonctions définies par
 - $g_1(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)$;
 - $g_2(x) = \sqrt{\cos(x)}$;
 - $\frac{1}{g_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$;
2. Montrer que $h(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{31}{36}x^3 + o(x^3)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction h en 0, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x}{1 + 6x^5}$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{x^2+1}}{2x}$.

Exercice 5.

1. Déterminer la limite de $\frac{x^3-1}{x-1}$ en 1.
2. En justifiant votre réponse, déterminer un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que l'application

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

soit continue sur \mathbb{R} .