Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – DM1

Exercice 1. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau unitaire.
2. Déterminer l'ensemble des inversibles de $\mathrm{End}(G)$.
3. On prend $G = \mathbb{R}^2$. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ est-il commutatif ? Est-il intègre ?
4. Même question avec $G = \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$.
2. Un élément a d'un anneau est nilpotent s'il existe un entier $k > 0$ tel que $a^k = 0$. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$.