

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – DM2 – CORRIGÉ

Exercice 1.

Calculez le quotient et le reste des divisions euclidiennes :

1. de $2X^7 - 3X^5 + X^2 - 7X + 2$ par $X^3 - 2X + 1$;

Par calculs successifs, on obtient :

- $2X^7 - 3X^5 + X^2 - 7X + 2 = 2X^4(X^3 - 2X + 1) + X^5 - 2X^4 + X^2 - 7X + 2$;
- $2X^7 - 3X^5 + X^2 - 7X + 2 = (2X^4 + X^2)(X^3 - 2X + 1) - 2X^4 + 2X^3 - 7X + 2$;
- $2X^7 - 3X^5 + X^2 - 7X + 2 = (2X^4 + X^2 - 2X)(X^3 - 2X + 1) + 2X^3 - 4X^2 - 5X + 2$;
- $2X^7 - 3X^5 + X^2 - 7X + 2 = (2X^4 + X^2 - 2X + 2)(X^3 - 2X + 1) - 4X^2 - X$.

Le quotient de la division vaut donc $2X^4 + X^2 - 2X + 2$ et le reste $-4X^2 - X$.

2. de $3X^5 - 1$ par $2X^3 - 2X^2 + X - 1$;

Par calculs successifs, on obtient :

- $3X^5 - 1 = \frac{3}{2}X^2(2X^3 - 2X^2 + X - 1) + 3X^4 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{2}X^2 - 1$;
- $3X^5 - 1 = (\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X)(2X^3 - 2X^2 + X - 1) + \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{2}X - 1$;
- $3X^5 - 1 = (\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{3}{4})(2X^3 - 2X^2 + X - 1) + \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}$.

Le quotient de la division vaut donc $\frac{3}{4}(2X^2 + 2X + 1)$ et le reste $\frac{1}{4}(6X^2 + 3X - 1)$.

3. de $X^4 - i$ par $X^2 + 2iX - 1$.

Par calculs successifs, on obtient :

- $X^4 - i = X^2(X^2 + 2iX - 1) - 2iX^3 + X^2 - i$;
- $X^4 - i = (X^2 - 2iX)(X^2 + 2iX - 1) - 3X^2 - 2iX - i$;
- $X^4 - i = (X^2 - 2iX - 3)(X^2 + 2iX - 1) + 4iX - 3 - i$.

Le quotient de la division vaut donc $X^2 - 2iX - 3$ et le reste $4iX - 3 - i$.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n := (X + 2)^{n+1} - X(X + 1)^n$.

1. Calculer P_0 , P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

Par calculs directs, on a :

$$P_0 = 2 \quad P_1 = 3X + 4 \quad P_2 = 4X^2 + 11X + 8 \quad P_3 = 5X^3 + 21X^2 + 31X + 16 \quad P_4 = 6X^4 + 34X^3 + 76X^2 + 79X + 32.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer :

- (a) le degré et le coefficient dominant de P_n ;

Puisque P_n est une différence entre deux polynômes de degré $n + 1$, son degré vaut au plus $n + 1$. Toutefois les terme de degré $n + 1$ de $(X + 2)^n$ et $X(X + 1)^n$ valent tous les deux 1 et s'annulent donc dans P_n . Par contre, d'après la formule du binôme de Newton, le terme de degré n de $(X + 2)^{n+1}$ vaut $\binom{n+1}{n}.X^n.2 = (2n + 2)X^n$, tandis que celui de $X(X + 1)^n$ vaut $^1X.\binom{n}{n-1}X^{n-1} = nX^n$; par différence, on en déduit que le coefficient de degré n de P_n vaut $n + 2 \neq 0$. On a donc $\deg(P_n) = n$ et le coefficient dominant vaut $n + 2$.

1. et ce même pour $n = 0$ car par convention $\binom{0}{-1} = 0$

(b) *le coefficient constant.*

Toujours par la formule du binôme de Newton, le coefficient constant de $(X+2)^{n+1}$ vaut 2^{n+1} tandis que celui de $X(X+1)^n$ vaut 0 puisqu'il se factorise par X . Par différence, on en déduit que le coefficient constant de P_n vaut 2^{n+1} .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme-t-elle une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_n$?

On remarque que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes dont les degrés sont échelonnés de 0 à n . On en déduit qu'il forment une base, ou bien parce que la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces polynômes dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}[X]_n$ est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale; ou bien parce que c'est une famille libre de $\mathbb{R}[X]_n$ de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}[X]_n)$. En effet, par récurrence sur n , le résultat est vrai pour $n=0$ car la famille ne contient alors qu'un seul polynôme non nul; et si pour $n > 0$ on a $\sum_{k=0}^n \alpha_k P_k = 0$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, alors le coefficient de degré n du terme de gauche valant $(n+2)\alpha_n$ et celui de droite valant 0, on a $\alpha_n = 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k = 0$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme donc une base de $\mathbb{R}[X]_n$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} - P_n$ est divisible par $X+1$.

On a

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= (X+2)^{n+2} - X(X+1)^{n+1} - (X+2)^{n+1} + X(X+1)^n \\ &= (X+2)^{n+2} - (X+2)^{n+1} + X(X+1)^n - X(X+1)^{n+1} \\ &= (X+2)^{n+1}(X+2-1) + X(X+1)^n(1-X-1) \\ &= (X+2)^{n+1}(X+1) - X^2(X+1)^n \\ &= (X+1)((X+2)^{n+1} - X^2(X+1)^{n-1}). \end{aligned}$$

Le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est donc bien divisible par $X+1$ dès lors que $n \geq 1$.