Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 1
correction, sujet A

Question 1
Un entier $r \in \mathbb{N}$ est le reste de la division euclidienne de $n_1 \in \mathbb{Z}$ par $n_2 \in \mathbb{Z}^*$ si et seulement si $r \in [\![0, n_2 - 1]\!]$ et s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n_1 = qn_2 + r$.

Question 2
Il s'agit de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{P} =: \{p_1, \ldots, p_\ell\}$, l'ensemble des nombres premiers, est un ensemble fini, alors $N := \prod_{i=1}^{\ell} p_i + 1 > 1$ possède au moins un diviseur premier, disons p_{k_0}. On a donc $N = a.p_{k_0}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et donc $1 = \left(a - \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k_0}}^{\ell} p_i\right).p_{k_0}$. Cela implique $|p_{k_0}| \leq 1$, ce qui est absurde car p_{k_0} est premier.

Question 3
Par divisions euclidiennes successives, on a

$$249 = 3.73 + 30 \qquad 73 = 2.30 + 13 \qquad 30 = 2.13 + 4 \qquad 13 = 3.4 + 1.$$

En remontant les calculs, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3.4 \ = \ 13 - 3.(30 - 2.13) \\ &= 7.13 - 3.30 \ = \ 7.(73 - 2.30) - 3.30 \\ &= 7.73 - 17.30 \ = \ 7.73 - 17(249 - 3.73) \\ &= 58.73 - 17.249. \end{aligned}$$

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 1
correction, sujet B

Question 1
Pour tout nombre premier p, la valuation p-adique d'un entier $n \in \mathbb{Z}^*$ est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que p^k divise n.

Question 2
Si $b = q.a$, alors $|b| = |q|.|a|$. De plus, $|q| \neq 0$ car autrement on aurait $q = 0$ et donc $b = 0.a = 0$, donc $|q| \geq 1$ et on a $|b| = |q|.|a| \geq |a|$.

Question 3
Puisque $\operatorname{pgcd}(a, b)$ divise a et b, il divise également $3a - 4b^2$ et donc $\operatorname{pgcd}(3a - 4b^2, b)$.

Réciproquement, puisque $\operatorname{pgcd}(3a - 4b^2, b)$ divise b et $3a - 4b^2$, il divise également $3a = (3a - 4b^2) + 4b.b$. Or b étant premier avec 3, tout diviseur de b, en particulier $\operatorname{pgcd}(3a - 4b^2, b)$, est également premier avec 3 et, d'après le lemme de Gauss, $\operatorname{pgcd}(3a - 4b^2, b)$ divise a. Il divise donc $\operatorname{pgcd}(a, b)$.

La divisibilité étant une relation d'ordre sur les entiers positifs, on en déduit que $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(3a - 4b^2, b)$.

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 1
correction, sujet A

Question 1
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p, un entier premier, divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Question 2
Tout diviseur commun de b et r est également un diviseur commun de b et $a = q.b+r$. Mais réciproquement, tout diviseur commun de b et a est également un diviseur commun de b et $r = a - q.b$. On en déduit que les ensembles des diviseurs communs de a et b, et de b et r sont les mêmes, et qu'il en va donc de même de leurs plus grands éléments $\mathrm{pgcd}(a, b)$ et $\mathrm{pgcd}(b, r)$.

Question 3
On pose $n = 3q + r$ la division euclidienne de n par 3. On distingue alors les cas selon la valeur de r :

si $r = 0$ **:** alors n est divisible par 3 et donc $2n$ aussi ;
si $r = 1$ **:** alors $n - 1 = 3q + 1 - 1 = 3q$ est divisible par 3 ;
si $r = 2$ **;** alors $5n - 1 = 5(3q + 2) - 1 = 15q + 9 = 3(5q + 3)$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, $n - 1$, $2n$ ou $5n - 1$ est divisible par 3.

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 1
correction, sujet B

Question 1
Un nombre premier est un entier positif possédant exactement quatre diviseurs.

Question 2
Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Il s'agit de montrer que si a divise bc et que a et b sont premier entre eux, alors a divise c.

Par le théorème de Bachet–Bézout, on sait qu'il existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = r.a + s.b$; et par hypothèse qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b.c = k.a$. Mais alors $c = c.r.a + c.s.b = c.r.a + s.k.a = (c.r + s.k).a$ et donc a divise c.

Question 3
Par divisions euclidiennes successives, on a

$$156 = 3.41 + 33 \qquad 41 = 1.33 + 8 \qquad 33 = 4.8 + 1$$

En remontant les calculs, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= 33 - 4.8 = 33 - 4(41 - 33) \\ &= 5.33 - 4.41 = 5.(156 - 3.41) - 4.41 \\ &= 5.156 - 19.41.. \end{aligned}$$