Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 1
correction, sujet A

Question 1
L'espace quotient $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{\overline{x}^{\sim} \mid x \in X\} = \Big\{\{y \in X \mid y \sim x\} \mid x \in X\Big\}.$$

Attention : l'écriture ci-dessus est a priori redondante car deux éléments $x, x' \in X$ équivalents décriront la même classe !

Question 2
Commençons par chercher $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} n_1 \equiv 1\ [9] \\ n_1 \equiv 0\ [19] \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} n_2 \equiv 0\ [9] \\ n_2 \equiv 1\ [19] \end{array}\right. .$$

Pour cela, on part de l'identité de Bézout $1 = 19 - 2.9$ et on pose $n_1 := 19$ et $n_2 := -2.9 = -18$. Enfin, on pose $\widetilde{n} = -4n_1 + 7n_2 = -76 - 126 = -202$ qui vérifie bien les congruences voulues. Toutefois, $-202 \notin \mathbb{N}$, il faut donc lui ajouter un multiple de $9.19 = 171$ suffisamment grand pour obtenir quelque chose de positif. Au final, on pose $n = \widetilde{n} + 2.171 = 140$. On a bien $140 \in \mathbb{N}$, $140 = 16.9 - 4 \equiv -4\ [9]$ et $43 = 7.19 + 7 \equiv 7\ [19]$.

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 2
correction, sujet B

Question 1
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux, et $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$. Le théorème chinois affirme l'existence d'un unique $N \in [\![0, n_1 n_2 \cdots n_k - 1]\!]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $N \equiv a_i\ [n_i]$.

Question 2
Par définition de la congruence modulo n, $a - a'$ et $b - b'$ sont divisibles par n et il existe donc $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$ tels que $a - a' = nk_a$ et $b - b' = nk_b$. Mais alors

$$ab - a'b' = ab - a'b + a'b - a'b' = (a - a')b + a'(b - b') = nk_a b + nk_b a' = n(k_a b + k_b a')$$

est divisible par n et donc $ab \equiv a'b'\ [n]$.

Question 3
On a $7n^2 + n - 5 \equiv n^2 - 2n + 1 \equiv (n-1)^2\ [3]$. De plus, 3 étant premier, $(n-1)^2$ est divisible par 3 ssi $n - 1$ l'est. On en déduit que $7n^2 + n - 5$ est divisible par 3 ssi $n - 1$ l'est, autrement dit ssi $n \equiv 1\ [3]$, ou encore $n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement, on aurait pu remarquer que, si $n \equiv -1\ [3]$, alors $7n^2 + n - 5 \equiv 7 - 1 - 5 \equiv 1\ [3]$, que si $n \equiv 0\ [3]$, alors $7n^2 + n - 5 \equiv 0 + 0 - 5 \equiv 1\ [3]$, et que si $n \equiv 1\ [3]$, alors $7n^2 + n - 5 \equiv 7 + 1 - 5 \equiv 0\ [3]$. On arrive ainsi à la même conclusion.

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 2
correction, sujet A

Question 1
Par définition de la congruence modulo n, $a-a'$ et $b-b'$ sont divisibles par n et il existe donc $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$ tels que $a-a' = nk_a$ et $b-b' = nk_b$. Mais alors

$$(a+b)-(a'+b') = (a-a')+(b-b') = nk_a + nk_b = n(k_1+k_b)$$

est divisible par n et donc $a+b \equiv a'+b'\ [n]$.

Question 2
Commençons par chercher $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} n_1 \equiv 1\ [5] \\ n_1 \equiv 0\ [16] \end{cases}, \qquad \begin{cases} n_2 \equiv 0\ [5] \\ n_2 \equiv 1\ [16] \end{cases}.$$

Pour cela, on part de l'identité de Bézout $1 = 16 - 3.5$ et on pose $n_1 := 16$ et $n_2 := -3.5 = -15$. Enfin, on pose $\widetilde{n} = 3n_1 + 11n_2 = 48 - 165 = -117$ qui vérifie bien les congruences voulues. Toutefois, $-117 \notin \mathbb{N}$, il faut donc lui ajouter un multiple de $5.16 = 80$ suffisamment grand pour obtenir quelque chose de positif. Au final, on pose $n = \widetilde{n} + 160 = 43$. On a bien $43 \in \mathbb{N}$, $43 = 8.5 + 3 \equiv 3\ [5]$ et $43 = 2.16 + 11 \equiv 11\ [16]$.

Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Interrogation 2
correction, sujet B

Question 1
Une classe d'équivalence pour $\sim$ est un sous-ensemble de X constitué des éléments de X équivalents à un $x_0 \in X$ donné. Autrement dit, $\mathfrak{c} \subset X$ est une classe d'équivalence pour $\sim$ ssi il existe $x_0 \in X$ tel que $\mathfrak{c} = \{x \in X \mid x \sim x_0\}$.

Question 2
On rappelle que deux entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sont congrus modulo n ssi $k_2 - k_1$ est un multiple de n. La relation est donc bien :

- réflexive car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k - k = 0 = 0.n$ est bien un multiple de n ;
- symétrique car, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, si $k_2 - k_1$ est un multiple de n, alors $k_1 - k_2 = -(k_2 - k_1)$ l'est aussi ;
- transitive car, pour tous $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, si $k_2 - k_1$ et $k_3 - k_1$ sont des multiples de n, alors $k_3 - k_1 = (k_3 - k_2) + (k_2 - k_1)$ l'est aussi.

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence.

Question 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair, on a

$$3^n.4^{2n+2} + 3^{3n} = 3^n.4^2.\left(4^2\right)^n + \left(3^3\right)^n = 16.3^n.16^n + 27^n \equiv 1.3^n.1^n + (-3)^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0\ [15]$$

car, par imparité de n, $(-3)^n = -3^n$. On en déduit donc que $3^n.4^{2n+2} + 3^{3n}$ est divisible par 15.