Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Mémento sur les nombres entiers

Nous ne donnerons pas ici de définition formelle des nombres entiers, nous nous contenterons de dire qu'il existe un ensemble $\mathbb{N}$ dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, et que cet ensemble est muni d'opérations

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \text{ (addition)} \qquad\qquad . : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto & a.b \end{array} \text{ (multiplication)}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (associativité de +) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, (a+b)+c = a+(b+c)$;
- (associativité de .) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, (a.b).c = a.(b.c)$;
- (commutativité de +) $\forall a,b \in \mathbb{N}, a+b = b+a$;
- (commutativité de +) $\forall a,b \in \mathbb{N}, a.b = b.a$;
- (élément neutre pour +) $\exists 0 \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, a+0 = 0+a = a$
- (élément neutre pour .) $\exists 1 \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, a.1 = 1.a = a$;
- (distributivité de . sur +) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, a.(b+c) = a.b+a.c$ et $(a+b).c = a.c+b.c$.

Le nombre 0 joue un rôle très particilier vis-à-vis de la multiplication car il vérifie :

- (absorbance de l'élément 0) $\forall a \in \mathbb{N}, 0.a = 0$;
- (intégrité) $\forall a,b \in \mathbb{N}, a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

De ce dernier point, on déduit le principe de simplification affirmant que si $a.b = a.c$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$, alors $b = c$.

Par convention, on note $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sur $\mathbb{N}$, il existe une relation d'ordre total définie, pour tout $a,b \in \mathbb{N}$, par

$$a \geq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, a = b+c.$$

Cette relation d'ordre vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

- (compatibilité de $\geq$ avec +) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$;
- (compatibilité de $\geq$ avec .) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c$;
- (principe du plus petit élément) tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{N}$ non vide possède un plus petit élément ; en particulier, 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ et 1 le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$;
- tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{N}$ non vide et majoré possède un plus grand élément ;
- (principe archimédien) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, n.b > a$.

Un corollaire très utile est le suivant :

Corollaire. Pour tout $a,b \in \mathbb{N}$, $a > b \Leftrightarrow a \geq b+1$.

Ce corollaire qui est au cœur du principe de raisonnement suivant :

Principe (de récurrence)**.** Si une proposition dépendant d'un paramètre entier n est vraie pour une valeur n_0 et que sa véracité en n implique sa véracité en $n+1$, alors elle est vraie pour tout entier plus grand que n_0. En particulier, si $n_0 = 0$, alors il est vrai pour tout entier naturel.

parfois renforcé en :

Principe (de récurrence généralisée)**.** Si une proposition dépendant d'un paramètre entier n est vraie pour une valeur n_0 et que sa véracité pour tout entier $n_0 \leq k < n$ implique sa véracité en n, alors elle est vraie pour tout entier plus grand que n_0. En particulier, si $n_0 = 0$, alors il est vrai pour tout entier naturel.

On admettra également que $\mathbb{N}$ peut être étendu en un ensemble $\mathbb{Z}$, dont les éléments sont appelés *entiers relatifs* tels que les opérations $+$ et $.$ et la relation d'ordre $\geq$ s'étendent à $\mathbb{Z}$ et vérifient :

- associativité, commutativité, éléments neutres et distributivité, absorbance de 0, inégrité, compatibilité de $\geq$ avec $+$;
- (éléments opposés) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}, a + (-a) = 0$;
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \geq b \Rightarrow -b \geq -a$.

Plus explicitement, on a $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{-a \mid a \in \mathbb{N}^*\}$. Cela permet de définir l'application valeur absolue suivante :

$$| \, . \, | : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ a & \mapsto & \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ -a & \text{si } a \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{array} .$$

On note encore par convention $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.