Université Aix-Marseille 2019–2020

**Licence – Mathématiques**
**Algèbre 2**

PARTIEL
13 mars 2020

*Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.*
*Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.*
*Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.*
*L'épreuve dure deux heures.*

**Exercice 1.** (5 points)

1. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Donner la définition de la division euclidienne de $a$ par $b$.
2. Soit $G$ un groupe. Donner la définition :
   (a) du sous-groupe de $G$ engendré par un sous-ensemble $X \subset G$ ;
   (b) d'un sous-groupe distingué de $G$.
3. Enoncer le théorème des restes chinois.
4. Montrer qu'un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau ne contient qu'un seul élément.

**Exercice 2.** (3 points) Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si $d$ divise deux éléments parmi $a$, $b$ et $a+b$, alors il divise le troisième.
   (b) Montrer que si $d$ est premier et qu'il divise $ab$, alors il divise $a$ ou $b$.
2. Montrer que $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si $a+b$ et $ab$ sont premiers entre eux.

**Exercice 3.** (4 points)

1. Ecrire la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Résoudre l'équation $x^2 + \overline{3}x + \overline{2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 + 3n + 2$ soit divisible par 6.

**Exercice 4.** (6 points) Sur $\mathbb{R}$, on considère l'opération

$$*\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y - xy \end{array}.$$

1. Montrer que l'opération $*$ est associative et commutative.
2. (a) Trouver toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$ telles que $x * x = x$.
   (b) Déterminer un élément neutre pour $*$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x * y = 1$ si et seulement si $x = 1$ ou $y = 1$.
4. (a) Le couple $(\mathbb{R}, *)$ forme-t-il un groupe ?
   (b) Trouver un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal infini tel que $(A, *)$ soit un groupe abélien.

**Exercice 5.** (4 points) Soit $G$ un groupe et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que l'application

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^n \end{array}$$

soit un endomorphisme surjectif de groupe.

1. Soit $g, h \in G$.
   (a) Montrer que $(g.h)^n$ est un conjugué de $(h.g)^n$ par un élément que l'on précisera.
   (b) Exprimer le fait que $\psi$ est un morphisme de groupes sur les produits $g.h$ et $h.g$.
   (c) En déduire que $g^{n-1}$ et $h^n$ commutent.
2. Montrer que, pour tout $g_0 \in G$, $g_0^{n-1}$ est dans le centre $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$ de $G$.