

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

TD1 : ARITHMÉTIQUE

Divisibilité

Exercice 1. Montrer que le carré d'un entier impair est de la forme $8k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 8.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que n ne divise pas $(n-1)!$.

Exercice 4.

1. Déterminer le pgcd de 4147 et 10672. Déterminer le ppcm de 4235 et 2156.
2. Exprimer 1 comme
 - (a) combinaison linéaire à coefficients entiers de 7 et 9;
 - (b) combinaison linéaire à coefficients entiers de 41 et 93;
 - (c) combinaison linéaire à coefficients entiers de 15, 33 et 55.

Exercice 5. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, a^2 + b) = \text{pgcd}(a + b, 3a + 2b)$.

Exercice 6. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ deux entiers.

1. Montrer que si n_1 divise n_2 , alors $2^{n_1} - 1$ divise $2^{n_2} - 1$.
2. Montrer que le reste de la division euclidienne de $2^{n_2} - 1$ par $2^{n_1} - 1$ vaut $2^r - 1$, où r est le reste de la division euclidienne de n_2 par n_1 .
3. Montrer que $\text{pgcd}(2^{n_1} - 1, 2^{n_2} - 1) = 2^{\text{pgcd}(n_1, n_2)} - 1$.

Exercice 7. On considère l'entier $N_0 := 20!$.

1. Déterminer le nombre de diviseurs premiers de N_0 .
2. Déterminer le nombre de diviseurs de N_0 .

Exercice 8. Déterminer la plus grande puissance de 3 divisant $100!$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)$, $n(n+1)(n+2)$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ et $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ sont respectivement divisibles par 2, 6, 24 et 120.

Exercice 10. Soit $p, q \geq 5$ deux nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire dont la différence vaut 2. Montrer que $p + q$ est divisible par 12.

Exercice 11. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire, par récurrence, que p divise $n^p - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (petit théorème de Fermat) En déduire que p divise $n^{p-1} - 1$ si et seulement si $n \in \mathbb{N}^*$ est non divisible par p .

Nombres premiers

Exercice 12. Soit $a, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors

- (a) $a = 2$;
- (b) n est premier.

2. Montrer que si $a^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de deux.

Exercice 13. On indice les nombres premiers par ordre croissant : $p_1 := 2, p_2 := 3, p_3 := 5, p_4 := 7, p_5 := 11, \dots$ Plus rigoureusement, on pose $p_1 := 2$, puis récursivement, $p_{n+1} = \min\{k \in \mathcal{P} \mid k > p_n\}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

- 1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $p_n < 2^{2^{n-1}}$.
- 2. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $p_n > 2n$.
- 3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $p_{n+2} - p_n \geq 6$, et en déduire qu'à partir d'un certain rang, $p_n > 3n$.

Exercice 14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 15.

- 1. (a) Montrer que tout nombre de la forme $4n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins un facteur premier de la forme $4k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
- 2. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Nombres premiers entre eux

Exercice 16. On définit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

- 1. Déterminer les dix premiers termes de la suite.
- 2. Montrer que F_N est pair si et seulement si 3 divise $N + 1$.
- 3. Montrer que deux termes consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 17. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $n \in \mathbb{Z}$ divisible par p et par q . Montrer que pq divise n .

Exercice 18. Trouver les solutions entières des équations

- 1. $2045x - 64y = 1$;
- 2. $243x + 45y = 56$;
- 3. $171x + 207y = 324$.

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ deux nombres premiers entre eux. On considère l'équation $ax + by = ab$.

- 1. Déterminer l'ensemble des solutions entières.
- 2. Montrer qu'il n'existe pas de solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Exercice 20. Dans cet exercice, on cherche à déterminer l'ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$ des entiers possédant un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1.

- 1. Montrer que si $n \in A$, alors n est premier avec 2 et avec 5.
- 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10.
 - (a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $u_n := \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois}}$. Montrer qu'il existe deux termes u_{n_1}, u_{n_2} dont les restes par division euclidienne par N sont les mêmes.
 - (b) Montrer que si N divise $M \cdot 10^k$ avec $M \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, alors N divise M .
- 3. Montrer que A est l'ensemble des entiers premiers avec 10.

Congruences

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

1. 3 divise $2^{2n+1} + 1$;
2. 6 divise $5n^3 + n$;
3. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$;
4. 9 divise $4^n + 15n - 1$;
5. 11 divise $2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2$;
6. 17 divise $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Exercice 22. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ telles que $n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.

Exercice 23. Montrer que $10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}} \equiv 5[7]$.

Exercice 24. Montrer qu'un entier de la forme $8n + 7$ ne peut pas être la somme des carrés de trois entiers.

Exercice 25. En remarquant que $x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)(x^2+1)$, déterminer l'ensemble des entiers naturels $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

Exercice 26. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$1. \begin{cases} \bar{1}x + \bar{2}y = \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{4} \end{cases} \quad 2. x^2 - \bar{4}x - \bar{2} = \bar{0}.$$

Exercice 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de la division euclidienne de $2^{2n} + 2^n + 1$ par 21.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+6} = r_n$.
2. Calculer r_n pour tout entiers $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et en déduire, dans $\mathbb{N}$, les solutions de l'équation :

$$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 0[21].$$

Exercice 28. Déterminer l'inverse de $\overline{43}$ dans $\mathbb{Z}/320\mathbb{Z}$.

Exercice 29. Déterminer tous les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv 1[7]$, $x \equiv 4[9]$ et $x \equiv 3[5]$.

Exercice 30. Soit $a \neq b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que, pour tout $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $a^{k_1} \cdot b^{k_2} \equiv a^{k_1+k_2}[a-b]$.
2. En déduire que si n divise $a-b$, alors n^2 divise $a^n - b^n$.

Exercice 31.

1. Exprimer le petit théorème de Fermat en terme de congruence.
2. Montrer que :
 - (a) $30^{239} + 239^{30}$ n'est pas premier ;
 - (b) pour tout nombre premier $p \in \mathcal{P} \setminus \{2, 3\}$ et tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $6p$ divise $a \cdot b^p - b \cdot a^p$;
 - (c) pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $56\,786\,730$ divise $a \cdot b \cdot (a^{60} - b^{60})$.