

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

TD2 : GROUPES

Généralités

Exercice 1.

1. Montrer que $(]-1, 1[, *)$ avec $x * y := \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ avec $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 \cdot e^{y_1} + y_2 \cdot e^{x_1})$ est un groupe abélien.
3. On note L l'ensemble des applications de la forme $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(L, \circ)$ est un groupe. Est-il abélien ?
4. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E . Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on note $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ leur différence symétrique. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe. Est-il abélien ?

Exercice 2.

On pose

$$\begin{array}{llll} f_1: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & z \end{array} \quad \begin{array}{llll} f_2: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{z} \end{array} \quad \begin{array}{llll} f_3: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & -z \end{array} \quad \begin{array}{llll} f_4: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & -\frac{1}{z} \end{array}.$$

Montrer que $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ est un groupe abélien d'ordre 4.

Exercice 3. On souhaite définir une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbb{H} := \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ telle que $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$ et $(-1) \cdot x = -x$ pour tout $x \in \{1, i, j, k\}$.

1. Compléter la table d'une potentielle loi de composition interne.
2. Vérifier que cela définit bien une structure de groupe. C'est ce qu'on appelle le groupe des *quaternions*. Est-il abélien ?

Exercice 4.

Soit G un groupe, $g_1, g_2 \in G$. Montrer que

1. $(g_1 \cdot g_2 \cdot g_1^{-1})^n = g_1 \cdot g_2^n \cdot g_1^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
2. si $(g_1 \cdot g_2)^n = e$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(g_2 \cdot g_1)^n = e$;
3. si $g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_1 = g_2^{-1}$ et $g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_2 = g_1^{-1}$, alors $g_1^2 = g_2^2$ et $g_1^4 = g_2^4 = e$.

Exercice 5.

1. Soit $H \subset \mathbb{Z}$ un sous-groupe. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Déterminer les groupes $\langle a, b \rangle$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
3. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^*$. Déterminer les groupes $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $\cap_{1 \leq i \leq n} a_i \mathbb{Z}$.

Exercice 6.

Soit G un groupe.

1. Soit $g \in G$. Montrer que $Z(g) := \{h \in G \mid g \cdot h = h \cdot g\}$ est un sous-groupe de G . C'est ce qu'on appelle le *centralisateur* de g .
2. Montrer que $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, g \cdot h = h \cdot g\}$ est un sous-groupe de G . C'est ce qu'on appelle le *centre* de G .
3. Montrer que $Z(G) = \cap_{g \in G} Z(g)$.

Exercice 7. Soit G un groupe et $H_1, H_2 \subset G$ deux sous-groupes tels que $H_1 \cup H_2$ soit un sous-groupe. Montrer que parmi H_1 et H_2 , il y en a un qui est inclus dans l'autre.

Exercice 8. Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes. On munit $G_1 \times G_2$ de la loi de composition interne

$$\begin{aligned} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\ *: ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) &\longmapsto (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2) \end{aligned}$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, *)$ est un groupe. C'est ce qu'on appelle la structure de *groupe produit*.

Exercice 9. Soit G un groupe.

1. Soit $g \in G$.
 - (a) Montrer que $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 - (b) Montrer que $|\langle g \rangle| = |g|$.
2. Soit $X \subset G$ un sous-ensemble. Montrer que

$$\langle X \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^k x_i^{\varepsilon_i} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et, pour tout } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i \in X, \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \right\}.$$

3.
 - (a) Montrer que $\mathbb{Q}^*$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.
 - (b) Montrer que $\mathbb{Q}^* = \langle \mathcal{P} \sqcup \{-1\} \rangle$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 10. Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2.

1. Montrer que G est abélien.
2. On suppose maintenant que G est de plus fini.
 - (a) Soit $H \subset G$ un sous-groupe et $g \in G \setminus H$. Montrer que $|\langle H \cup \{g\} \rangle| = 2|H|$.
 - (b) En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 11.

1. Montrer que les isométries du plan $\mathbb{R}^2$ forment un groupe pour la composition.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$. On considère $A_1, \dots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier à n côtés.
 - (a) Montrer que les isométries laissant l'ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ globalement stable¹ est un sous-groupe des isométries du plan. Ce groupe est appelé *groupe diédral*, noté² D_n .
 - (b) Montrer que D_n contient un élément d'ordre n et un élément d'ordre 2.
 - (c) Montrer que tout élément de D_n est entièrement déterminé par l'image de A_1 et A_2 . En déduire que $|D_n| = 2n$.

Exercice 12. Soit G un groupe et $g_1, g_2 \in G$.

1. Montrer que $|g_1^{-1}| = |g_1|$.
2. Montrer que $|g_2 \cdot g_1 \cdot g_2^{-1}| = |g_1|$.
3. Montrer que $|g_1 \cdot g_2| = |g_2 \cdot g_1|$.
4.
 - (a) On suppose que G est abélien, que g_1 et g_2 sont d'ordre fini et que $\text{pgcd}(|g_1|, |g_2|) = 1$. Montrer que $|g_1 + g_2| = \text{ppcm}(|g_1|, |g_2|) (= |g_1| \cdot |g_2|)$.
 - (b) Trouver deux éléments $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tels que $|g_1 + g_2| \neq \text{ppcm}(|g_1|, |g_2|)$.
 - (c) Trouver deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_3$ tels que $\text{pgcd}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) = 1$ mais $|\sigma_1 \circ \sigma_2| \neq \text{ppcm}(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$.

Morphismes de groupes

Exercice 13. Parmi les applications suivantes, dire lesquelles sont des morphismes de groupes.

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, +) & & (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & \bar{z} & , & z & \longmapsto & \bar{z} \end{array} ;$$

1. c'est-à-dire l'ensemble des isométrie f telle que $f(\{A_1, \dots, A_n\}) = \{A_1, \dots, A_n\}$

2. on le trouve aussi parfois noté D_{2n} , il faut donc toujours faire attention à la convention utilisée

- $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \quad (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$;
 $z \longmapsto |z| \quad , \quad z \longmapsto |z|$;
- $\mathbb{Z} \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot) \quad \mathbb{Z} \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$
 $n \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad , \quad n \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} ;$
- $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
 $n \longmapsto n^2 \quad , \quad \bar{n} \longmapsto \bar{n}^2 \quad , \quad \bar{n} \longmapsto \bar{n}^2 ;$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$;
 $M \longmapsto \det(M) \quad , \quad M \longmapsto \det(M) ;$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$;
 $M \longmapsto \text{Tr}(M) \quad , \quad M \longmapsto \text{Tr}(M) ;$
- $(\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) \longrightarrow (\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) \quad (\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*), \cdot) \longrightarrow (\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*), \cdot)$;
 $f \longmapsto f' \quad , \quad f \longmapsto f'$,
où $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{(*)})$ représente l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{(*)}$.

Exercice 14. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ \bar{k} & \longmapsto & \overline{3k} \end{array} .$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est un morphisme de groupes.
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 15. On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\sigma: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{array} .$$

1. Montrer que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ est un groupe.
2. Montrer que σ est un endomorphisme de groupe.
3. Caractériser l'image et le noyau de σ .

Exercice 16. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et n', m' tels que $n = n' \cdot \text{pgcd}(n, m)$ et $m = m' \cdot \text{pgcd}(n, m)$. On considère l'application

$$\text{mult}_m^n: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \bar{k} & \longmapsto & \overline{m \cdot k} \end{array} .$$

1. Montrer que mult_m^n est un endomorphisme de groupe.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\bar{k} \in \text{Ker}(\text{mult}_m^n)$. Montrer que $n' \mid k$.
3. En déduire que $\text{Ker}(\text{mult}_m^n)$ est engendré par la classe de $\frac{n}{\text{pgcd}(n, m)}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 17.

1. Montrer qu'un endomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est entièrement déterminé par $f(1)$. En déduire tous les endomorphismes, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les endomorphismes, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer tous les endomorphismes continus de $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit G un groupe. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Exercice 19. Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

1. Soit $g \in G_1$ un élément d'ordre fini. Montrer que $|f(g)|$ est fini et qu'il divise $|g|$.
2. Soit $H \subset G_1$ un sous-groupe fini. Montrer que $f(H) \subset G_2$ est fini et que $|f(H)|$ divise $|H|$.

Exercice 20. Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Montrer que si $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$ vérifient $g_2 = f(g_1)$, alors $f^{-1}(g_2) = g_1 \cdot \text{Ker}(f) := \{g_1 \cdot h \mid h \in \text{Ker}(f)\}$.

Exercice 21.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $(\{\pm 1\}, \cdot)$ sont isomorphes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
 - (a) Montrer que $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe.
 - (b) Montrer que $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 22.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
2. Montrer que D_3 et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 23. Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes. On se donne un morphisme de groupe $\varphi : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ et on munit $G_1 \times G_2$ de la loi de composition interne

$$\begin{aligned} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\ *_\varphi : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) &\longmapsto (g_1 *_1 (\varphi(g_2))(h_1), g_2 *_2 h_2) \end{aligned}$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, *_\varphi)$ est un groupe. C'est ce qu'on appelle le *produit semi-direct* associé à φ . On le note $G_1 \rtimes_\varphi G_2$, ou seulement $G_1 \rtimes G_2$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur φ .

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \varphi : \bar{k} &\longmapsto \begin{cases} g \mapsto g & \text{si } k=0 \\ g \mapsto -g & \text{si } k=1 \end{cases} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe bien défini.

2. Montrer que le groupe diédral D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 25. On considère l'ensemble M des morphismes de groupes allant de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

1. Montrer que tout élément $f \in M$ est entièrement déterminé par $f(\bar{1})$.
2. Déterminer le cardinal de M .
3. Déterminer le nombre d'épimorphismes de groupes dans M .

Exercice 26. Montrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Groupes quotients

Exercice 27.

- (a) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe distingué.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ est isomorphe à $\{\pm 1\}$.
- (a) Montrer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-groupe distingué.
(b) Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué.
(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 28. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Pour tout $g \in G$, on note $g.H := \{g.h \mid h \in H\}$ et $H.g := \{h.g \mid h \in H\}$. Montrer que H est distingué si et seulement si, pour tout $g \in G$, $g.H = H.g$.

Exercice 29. Soit G un groupe.

- Montrer que $Z(G)$ est distingué.
- On note $[G, G] := \langle \{g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1} \mid g_1, g_2 \in G\} \rangle$.
(a) Montrer que $[G, G]$ un sous-groupe distingué de G .
(b) Montrer que le groupe $G/[G, G]$ est abélien.
(c) Soit $H \subset G$ un sous-groupe distingué tel que G/H soit abélien. Montrer que $[G, G] \subset H$.

Exercice 30. Soit G un groupe.

- Montrer que $\mathrm{Int}(G)$, le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G , est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.
- A l'aide de l'application $\mathrm{conj} : G \rightarrow \mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est isomorphe à $G/Z(G)$.

Exercice 31.

- Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes, et $H \subset G_2$ un sous-groupe distingué. Montrer que $f^{-1}(H)$ est distingué.
- Montrer que l'image directe d'un sous-groupe distingué $H \subset G_1$ par un morphisme de groupes $f : G_1 \rightarrow G_2$ n'est pas forcément un sous-groupe distingué de G_2 .

Exercice 32. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2.

- Montrer que H est distingué.
- Déterminer à quel groupe classique G/H est isomorphe.

Exercice 33. On note O l'origine du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\{\text{rotations autour de } O\}$ est un sous-groupe non distingué des isométries du plan.

Exercice 34. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère les ensembles

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \quad \mathbb{U}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^k = 1\}.$$

- Montrer que, pour la multiplication, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_\infty$ sont des sous-groupes distingués de $\mathbb{C}^*$, et que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_\infty \subset \mathbb{U}$.
- Montrer que les groupes $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n$ sont tous isomorphes à $\mathbb{U}$.
- Montrer que $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.
- Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Exercice 35.

- Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{Q}$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- Montrer que tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini.

Exercice 36. Soit $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Est-il distingué ?
2. Montrer que U est un sous-groupe de T . Est-il distingué ?

Exercice 37.

1. Montrer que la relation “être un sous-groupe” est une relation d’ordre sur les groupes.
2. Montrer que la relation “être un sous-groupe distingué” n’est pas une relation d’ordre sur les groupes.

Exercice 38. Soit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux. On considère l’application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (n \bmod n_1, n \bmod n_2, \dots, n \bmod n_k) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Redémontrer le théorème des restes chinois.

Groupes de permutations

Exercice 39.

1. Ecrire les permutations suivantes comme produits de cycles à supports disjoints :
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;
 - $(624) \circ (361) \circ (12)$.
2. Ecrire les permutations suivantes comme produits de transpositions élémentaires :
 - $(142)(3576)$;
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Calculer la signatures des permutations suivantes :
 - $(316)(24)$;
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $c = (k_1 k_2 \dots k_\ell) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur $\ell \geq 2$.
 - (a) Donner explicitement l’inverse de c .
 - (b) Déterminer $|c|$.
 - (c) Déterminer $\mathrm{sign}(c)$.
2. On note $c_1 \circ \dots \circ c_r$ la décomposition d’une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en cycles à supports disjoints.
 - (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^k = c_1^k \circ \dots \circ c_r^k$.
 - (b) Montrer que l’ordre de σ est égal au plus petit multiple commun des longueurs des c_i .
 - (c) Montrer que $\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i=1}^r (-1)^{|c_i|+1}$, et en déduire que $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{p_\sigma}$, où $p_\sigma \in \mathbb{N}$ est le nombre de cycles de longueur paire dans la décomposition de σ .
3. Décomposer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 10 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer son ordre et sa signature.

Exercice 41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $c := (k_1 k_2 \cdots k_s) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(k_1) \sigma(k_2) \cdots \sigma(k_s)).$$

2. En déduire que deux cycles de $\mathfrak{S}_n$ ayant même longueur sont toujours conjugués.
3. Montrer que deux permutations dans $\mathfrak{S}_n$ dont les décompositions en cycles à supports disjoints possèdent le même nombre de cycles de longueur ℓ pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont conjugués.
4. Soit $\sigma_1 := (327)(19)(485)$ et $\sigma_2 := (48)(129)(365)$. Trouver $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ telle que $\sigma_2 = \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $m \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe un morphisme de groupe non trivial $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 43. Le but de l'exercice est de montrer que, pour $n \geq 3$, le centre $Z(\mathfrak{S}_n)$ du groupe $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

1. Soit $i \in \{1 \dots n\}$, donner un exemple de permutation s fixant i et seulement i .
2. Soit $\sigma \in Z(\mathfrak{S}_n)$, en utilisant le fait que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$, montrer que $\sigma(i) = i$.
3. Conclure que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

Exercice 44. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathfrak{S}_n = \langle \{(12), (12 \cdots n)\} \rangle$.

Exercice 45. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{6\}$. Le but de l'exercice est de montrer que tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont *intérieurs*, c'est-à-dire de la forme $(h \mapsto g^{-1}.h.g)$ pour un certain $g \in \mathfrak{S}_n$. Soit $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.

1. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $Z_{\mathfrak{S}_n}(\varphi(\sigma)) = \varphi(Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma))$, où $Z_{\mathfrak{S}_n}(a)$ dénote le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec $a \in \mathfrak{S}_n$.
2. Pour tout $\rho \in \mathfrak{S}_n$, donner la décomposition en cycles disjoints de $\rho.\sigma.\rho^{-1}$ en fonction de celle de σ .
3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note k_i le nombre de i -cycles dans la décomposition en cycles disjoints de σ . Montrer que $|Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)| = \prod_{i=1}^n k_i! i^{k_i}$.
4. En déduire que φ envoie toute transposition sur une transposition.
5. En déduire que φ est intérieur.

Exercice 46. (l'impasse "Reservoir dogs") Dans un moment de tension intense, n mafieux, disposés dans une pièce (on supposera qu'ils sont tous à des distances différentes les uns des autres), pointent chacun leur arme vers la personne la plus proche. Soudain, un ballon éclate et tous tirent. Montrer que, si n est impair, alors il y a au moins un survivant.