Université Aix-Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – PREMIER THÉORÈME D'ISOMORPHISME

Le théorème suivant est sans doute le plus important en théorie des groupes.

Théorème (premier théorème d'isomorphisme)**.** Tout morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ induit un isomorphisme $\overline{f} : G_1/_{\mathrm{Ker}(f)} \to \mathrm{Im}(f)$ défini, pour tout $g \in G_1$, par $\overline{f}(\overline{g}) = f(g)$.

Démonstration. Montrons déjà que $\overline{f}$ est bien défini, c'est-à-dire que $\overline{f}(\overline{g})$ ne dépend pas du choix du représentant $g \in G_1$. Considérons donc g' un autre représentant de la classe de g. On a alors $g'.g^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $e_{G_2} = f(g'.g^{-1}) = f(g').f(g)^{-1}$, autrement dit $f(g') = f(g)$. De plus, par définition de $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$ va bien dans dans $\mathrm{Im}(f)$, et elle est même surjective. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\overline{f}$ est injective. Mais si $\overline{g} \in \mathrm{Ker}(\overline{f})$, c'est que $f(g) = e_{G_2}$, donc que $g \in \mathrm{Ker}(f)$, et donc que $\overline{g} = \overline{e}_{G_1}$. $\square$

Exemples.

- Le morphisme $\mathrm{Id}_G : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g \end{array} \right.$ induit un isomorphisme $\overline{\mathrm{Id}}_G : G/_{\{e\}} \to G$.
- Le morphisme $\mathrm{Triv}_G : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & e \end{array} \right.$ induit un isomorphisme $\overline{\mathrm{Triv}}_G : G/ \to \{e\}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application

$$\mathrm{exp}_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ k & \longmapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array} .$$

  On a $\mathrm{Ker}(\mathrm{exp}_n) = n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{exp}_n) = \mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On en déduit que $\overline{\mathrm{exp}}_n : \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{U}_n$ est un isomorphisme.