Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 1 – GROUPES QUOTIENTS – PARTIE 1

Exercice 1.

1. (a) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe distingué.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ est isomorphe à $\{\pm 1\}$.
2. (a) Montrer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-groupe distingué.
   (b) Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Pour tout $g \in G$, on note $g.H := \{g.h \mid h \in H\}$ et $H.g := \{h.g \mid h \in H\}$. Montrer que H est distingué si et seulement si, pour tout $g \in G$, $g.H = H.g$.

Exercice 3. Soit G un groupe.

1. Montrer que $Z(G)$ est distingué.
2. On note $[G, G] := \left\langle \{g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1} \mid g_1, g_2 \in G\} \right\rangle$.
   (a) Montrer que $[G, G]$ un sous-groupe distingué de G.
   (b) Montrer que le groupe $G/[G, G]$ est abélien.
   (c) Soit $H \subset G$ un sous-groupe distingué tel que G/H soit abélien. Montrer que $[G, G] \subset H$.

Exercice 4. Soit G un groupe.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$, le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G, est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.
2. A l'aide de l'application $\mathrm{conj} : G \to \mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est isomorphe à $G/Z(G)$.

Exercice 5.

1. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes, et $H \subset G_2$ un sous-groupe distingué. Montrer que $f^{-1}(H)$ est distingué.
2. Montrer que l'image directe d'un sous-groupe distingué $H \subset G_1$ par un morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ n'est pas forcément un sous-groupe distingué de G_2.

Exercice 6. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2.

1. Montrer que H est distingué.
2. Déterminer à quel groupe classique G/H est isomorphe.