Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 1 – Groupes quotients – Corrigé TD 1

Exercice 1.

1. (a) *Montrer que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe distingué.*
Si $x, y > 0$, alors $xy > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$. De plus, $1 > 0$. Ainsi $\mathbb{R}_+^*$ est non vide et stable par multiplication et prise d'inverse, c'est donc un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$. Comme $\mathbb{R}^*$ est abélien, tous ses sous-groupes sont distingués, en particulier $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) *Montrer que $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ est isomorphe à $\{\pm 1\}$.*
On vérifie facilement que l'application $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \{\pm 1\} \\ x & \mapsto & \frac{x}{|x|} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes et qu'il est surjectif. D'après le premier théorème d'isomorphisme, v induit un isomorphisme $\overline{v} : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \to \{\pm 1\}$.

2. (a) *Montrer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-groupe distingué.*
Comme $\mathbb{R}$ contient 0 et est stable par addition et prise d'opposé, c'est un sous-groupe de $\mathbb{C}$. Il est forcément distingué car $\mathbb{C}$ est abélien.

   (b) *Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.*
L'application $r : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ x + iy & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes et il est surjectif. D'après le premier théorème d'isomorphisme, r induit un isomorphisme $\overline{r} : \mathbb{C}/\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

   (a) *Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué.*
La matrice I_n est dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, qui est donc non vide. Comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication et prise d'inverse. C'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Maintenant, si $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B)^{-1} = 1$, donc $BAB^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est distingué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   (b) *Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.*
L'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes. Si $x \in \mathbb{R}^*$, la matrice diagonale de diagonale $(x, 1, \ldots, 1)$ est inversible et de déterminant x, donc det est surjectif. Ainsi, le premier théorème d'isomorphisme implique que det induit un isomorphisme $\overline{\det} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$.

Exercice 2. *Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Pour tout $g \in G$, on note $g.H := \{g.h \mid h \in H\}$ et $H.g := \{h.g \mid h \in H\}$. Montrer que H est distingué si et seulement si, pour tout $g \in G$, $g.H = H.g$.*
Supposons d'abord que G est distingué et fixons $g \in G$. Pour tout $h \in H$, on a $k := ghg^{-1} \in H$, donc $gh = kg \in H.g$. Ainsi $g.H \subset H.g$. De même, pour tout $h \in H$, on a $\ell := g^{-1}hg \in H$, donc $hg = g\ell \in g.H$. D'où $H.g \subset g.H$ et finalement $g.H = H.g$.
Supposons maintenant que $g.H = H.g$ pour tout $g \in G$. Soient $g \in G$ et $h \in H$. Alors $gh \in g.H = H.g$, donc il existe $k \in H$ tel que $gh = kg$. Ainsi $ghg^{-1} = k \in H$. On en déduit que H est distingué.

Exercice 3. *Soit G un groupe.*

1. *Montrer que $Z(G)$ est distingué.*
   Rappelons que $Z(G) = \{g \in G \,|\, \forall h \in G, gh = hg\}$ est un sous-groupe de G. Si $g \in Z(G)$ et $x \in G$, alors $xgx^{-1} = gxx^{-1} = g \in Z(G)$. Donc $Z(G)$ est distingué dans G.

2. *On note $[G,G] := \langle \{g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1} \,|g_1, g_2 \in G\} \rangle$.*
   (a) *Montrer que $[G,G]$ un sous-groupe distingué de G.*
   Pour $g_1, g_2 \in G$, on note $[g_1, g_2] = g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1}$. Pour $g, h, x \in G$, on a :
   $$[g,h]^{-1} = \left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h,g],$$
   et
   $$x[g,h]x^{-1} = [xgx^{-1}, xhx^{-1}].$$
   Si $g \in [G,G]$, alors g s'écrit $g = \prod_{i=1}^{n} [g_i, h_i]^{\varepsilon_i}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $g_i, h_i \in G$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. Pour $x \in G$, on a alors $xgx^{-1} = \prod_{i=1}^{n} [xg_ix^{-1}, xh_ix^{-1}]^{\varepsilon_i} \in [G,G]$. Ainsi $[G,G]$ est distingué dans G.

   (b) *Montrer que le groupe $G/_{[G,G]}$ est abélien.*
   Si $g, h \in G$, $ghg^{-1}h^{-1} \in [G,G]$ implique que $\bar{g}\bar{h}\bar{g}^{-1}\bar{h}^{-1} = \bar{e}$ et donc $\bar{g}\bar{h} = \bar{h}\bar{g}$.

   (c) *Soit $H \subset G$ un sous-groupe distingué tel que $G/_H$ soit abélien. Montrer que $[G,G] \subset H$.*
   Comme $G/_H$ est abélien, pour tous $g, h \in G$, $\bar{g}\bar{h} = \bar{h}\bar{g}$, donc $\bar{g}\bar{h}\bar{g}^{-1}\bar{h}^{-1} = \bar{e}$ et $ghg^{-1}h^{-1} \in H$. Comme $[G,G]$ est le plus petit sous-groupe de G contenant tous les $[g,h]$, cela implique que $[G,G] \subset H$.

Exercice 4. *Soit G un groupe.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Int}(G)$*, le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G, est distingué dans* $\mathrm{Aut}(G)$*.*
   Les automorphismes intérieurs de G sont les $\varphi_x : \begin{cases} G & \to & G \\ g & \mapsto & xgx^{-1} \end{cases}$ pour $x \in G$. Si $x \in G$ et $f \in \mathrm{Aut}(G)$, alors pour tout $g \in G$:
   $$\begin{aligned} f \circ \varphi_x \circ f^{-1}(g) &= f(x.f^{-1}(g).x^{-1}) \\ &= f(x).f \circ f^{-1}(g).f(x^{-1}) \\ &= f(x).g.f(x)^{-1} \\ &= \varphi_{f(x)}(g). \end{aligned}$$
   Ainsi $f \circ \varphi_x \circ f^{-1} = \varphi_{f(x)} \in \mathrm{Int}(G)$. Donc $\mathrm{Int}(G)$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

2. *À l'aide de l'application* $\mathrm{conj} : G \to \mathrm{Aut}(G)$*, montrer que* $\mathrm{Int}(G)$ *est isomorphe à* $G/_{Z(G)}$.
   Notons d'abord que conj est un morphisme de groupes. Par définition, $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Im}(\mathrm{conj})$. Maintenant, $x \in \ker(\mathrm{conj})$ si et seulement si φ_x est le morphisme identité, si et seulement si $\varphi_x(g) = xgx^{-1} = g$ pour tout $g \in G$, si et seulement si $xg = gx$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $x \in Z(G)$. Donc $\ker(\mathrm{conj}) = Z(G)$. Finalement le premier théorème d'isomorphisme dit que conj induit un isomorphisme $\overline{\mathrm{conj}} : G/_{Z(G)} \to \mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 5.

1. *Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes, et $H \subset G_2$ un sous-groupe distingué. Montrer que $f^{-1}(H)$ est distingué.*
   Soient $x \in G_1$ et $y \in f^{-1}(H)$. Alors $f(y) \in H$ et, comme H est distingué dans G_2, $f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1} \in H$. Ainsi $xyx^{-1} \in f^{-1}(H)$ et $f^{-1}(H)$ est distingué dans G_1.

2. *Montrer que l'image directe d'un sous-groupe distingué $H \subset G_1$ par un morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ n'est pas forcément un sous-groupe distingué de G_2.*
   Soit G un groupe qui possède un sous-groupe H non distingué (par exemple $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$). Alors H est un sous-groupe distingué de H lui-même, et l'inclusion $\iota : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & G \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes. Ici, l'image directe du sous-groupe distingué $H \subset H$ est le sous-groupe H non distingué dans G.

Exercice 6. *Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2.*

1. *Montrer que H est distingué.*
   Les deux classes d'équivalence modulo H dans G sont H et $H.x$ pour n'importe quel $x \in G \setminus H$. Prenons $g \in G$ et $h \in H$, et montrons que $ghg^{-1} \in H$. Si $g \in H$, alors $ghg^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe. Supposons $g \in G \setminus H$. Alors $g^{-1} \in G \setminus H$ et il existe $k \in H$ tel que $g^{-1} = kx$. Par l'absurde, si $ghg^{-1} \notin H$, alors $ghg^{-1} \in G \setminus H$ et il existe $\ell \in H$ tel que $ghg^{-1} = \ell x$; mais alors on a $x^{-1}k^{-1}hkx = \ell x$, donc $x = k^{-1}hk\ell^{-1} \in H$, ce qui est faux. Finalement $ghg^{-1} \in H$ pour tout $g \in G$, et H est distingué dans G.

2. *Déterminer à quel groupe classique ${}^{G}\!/_{H}$ est isomorphe.*
   Le groupe ${}^{G}\!/_{H}$ contient exactement deux éléments, $\bar{e}$ et $\bar{x}$. Comme $\bar{x} \neq \bar{e}$, on ne peut pas avoir $\bar{x}^2 = \bar{x}$. Ainsi la table de multiplication du groupe est nécessairement :

$\cdot$	$\bar{e}$	$\bar{x}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{x}$
$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{e}$

   On en déduit que ${}^{G}\!/_{H}$ est isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$ via $\left\{ \begin{array}{ccc} \bar{e} & \mapsto & 0 \\ \bar{x} & \mapsto & 1 \end{array} \right.$.