Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 1 – Groupes quotients – Partie 2

Exercice 1. On note O l'origine du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\{$rotations autour de $O\}$ est un sous-groupe non distingué des isométries du plan.

Exercice 2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère les ensembles

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \qquad \mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \qquad \mathbb{U}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^k = 1\}.$$

1. Montrer que, pour la multiplication, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_\infty$ sous des sous-groupes distingués de $\mathbb{C}^*$, et que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_\infty \subset \mathbb{U}$.
2. Montrer que les groupes $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n$ sont tous isomorphes à $\mathbb{U}$.
3. Montrer que $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.
4. Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
3. Montrer que tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini.

Exercice 4. Soit $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Est-il distingué ?
2. Montrer que U est un sous-groupe de T. Est-il distingué ?

Exercice 5.

1. Montrer que la relation "être un sous-groupe" est une relation d'ordre sur les groupes.
2. Montrer que la relation "être un sous-groupe distingué" n'est pas une relation d'ordre sur les groupes.

Exercice 6. Soit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux. On considère l'application

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \big(n\ [n_1], n\ [n_2], \dots, n\ [n_k]\big) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Redémontrer le théorème des restes chinois.