Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 2 – TD1 – Anneaux : théorie générale

Exercice 1. Montrer que les ensembles munis de deux lois de composition suivants sont des anneaux. Déterminer s'ils sont commutatifs, unitaires, intègres.

1. $(\mathbb{Q}, +, .)$.
2. $(n\mathbb{Z}, +, .)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, .\big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. $\big(\mathrm{End}(E), +, \circ\big)$ où E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.
6. $(\mathbb{R}[X], +, .)$ où $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels à une indéterminée.
7. $\mathcal{F}(X, A) := \{f : X \to A\}$ où A est un anneau et X un ensemble, avec la somme et la multiplication définies pour tous $f_1, f_2 : X \to A$ par $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et $(f_1.f_2)(x) = f_1(x).f_2(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 3.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des suites à valeurs réelles est un anneau commutatif unitaire pour l'addition et la multiplication terme à terme. Est-il intègre ?
2. Montrer que le sous-ensemble des suites réelles convergentes est un sous-anneau unitaire de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de l'addition et de la multiplication définies dans l'exercice 1, point 7.

1. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\times$ des inversibles.

Exercice 5. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Sont-ils des anneaux ? intègres ? unitaires ? des corps ?
2. Sont-ils des sous-anneaux de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? des sous-anneaux unitaires ?

Exercice 6. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on rappelle que $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Montrer que $\big(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap\big)$ est un anneau commutatif et unitaire.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)^\times$ des inversibles et l'ensemble des diviseurs de zéro. L'anneau $\mathcal{P}(E)$ est-il intègre ?

Remarque. N'hésitez pas à dessiner des patates !

Exercice 7. Soit $(A, +)$ un groupe abélien et $\,.\, : A \times A \to A$ une opération associative sur A. Montrer que $(A, +, \,.\,)$ est un anneau si et seulement si, pour tout $a \in A$, les applications

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & a.b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & b.a \end{array}$$

sont des morphismes de groupes.

Exercice 8. Soient A_1 et A_2 des anneaux. On munit $A_1 \times A_2$ des lois de composition internes

$$+ : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{array}$$

et

$$. : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1.b_1, a_2.b_2) \end{array}.$$

1. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \,.\,)$ est un anneau. C'est ce qu'on appelle la structure d'*anneau produit*.
2. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \,.\,)$ est unitaire et/ou commutatif si et seulement si A_1 et A_2 le sont.