Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 2 – TD2 – Anneaux : théorie générale

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(M)$.
   (b) En déduire que M est un diviseur de zéro.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times = \left\{\overline{k} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ premier avec } n\right\}$.
2. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Pour quels n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il intègre ? Dans ce cas, montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Exercice 3. Soit A un anneau. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$.

1. Montrer qu'un élément inversible ne peut pas être nilpotent.
2. Soit $a \in A$ un élément niloptent. À l'aide d'une identité remarquable, montrer que $1+a$ est inversible.
3. Soient $a, b \in A$ des éléments nilpotents qui commutent. Montrer que ab et $a+b$ sont nilpotents.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admt une valeur propre non nulle, alors M n'est pas nilpotente.
   (b) Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit A un anneau unitaire. On considère, pour $a \in A$, l'équation $x^2 = a$.

1. Montrer que, si A est intègre, alors l'équation admet au plus deux solutions.
2. On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et on se place dans le cas $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a = \mathrm{Id}$. Montrer que l'équation possède alors au moins 2^n solutions.

Exercice 5. Soit A un anneau unitaire. Pour tout ensemble $X \subset A$, on note $\langle X \rangle$ l'intersection de tous les sous-anneaux unitaires de A contenant X.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de sous-anneaux unitaires de A est un sous-anneau unitaire de A.
2. Montrer que, pour tout $X \subset A$, $\langle X \rangle$ est le plus petit sous-anneau unitaire de A contenant X dans le sens où il est contenu dans tout sous-anneau unitaire de A contenant X.
3. On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $\langle \emptyset \rangle = \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\langle \{\frac{1}{10}\} \rangle$ est l'ensemble des nombres décimaux.
   (c) Montrer que $\langle \{i\} \rangle = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des entiers de Gauss.
   (d) Montrer que $\langle \{e^{\frac{2i\pi}{3}}\} \rangle = \left\{\frac{a+ib\sqrt{3}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \equiv b\ [2]\right\}$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\varphi(n) := \left|\left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\right\}\right|$. C'est ce qu'on appelle la fonction *indicatrice d'Euler*.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = \left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^{\times}\right|$.
2. Montrer que, pour tout nombre premier p, $\varphi(p) = p - 1$.
3. Montrer que, pour tout nombre premier p et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
4. Montrer que, pour tous entiers $n_1, n_2 \geq 2$ premiers entre eux, $\varphi(n_1.n_2) = \varphi(n_1).\varphi(n_2)$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = n.\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, où $p_1, \ldots, p_r$ sont les nombres premiers intervenant dans la décomposition de n en facteurs premiers.
6. On fixe maintenant l'entier $n \geq 2$ et, pour tout diviseur d de n, on note
$$A_d := \left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = d\right\}.$$
   (a) Montrer que, pour tout diviseur d de n, $|A_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.
   (b) En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 7.

1. On note $\mathcal{G} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble dit des *entiers de Gauss*.
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer $\mathcal{G}^{\times}$ possède exactement 4 éléments.
2. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$.
   (b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n := \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$ et $b_n := \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.
   Montrer que $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ et que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.
   ii. Montrer $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times}$ possède une infinité d'éléments.