Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 3 – TD1 – ANNEAUX : MORPHISMES ET IDÉAUX

Exercice 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(3) \end{cases}$. Montrer que f est un morphisme d'anneaux et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'application

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & n\mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k.n \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes, mais n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 3. Soit A_1 et A_2 deux anneaux. On suppose que A_1 est unitaire et qu'il existe un épimorphisme d'anneaux $f : A_1 \to A_2$. Montrer que A_2 et f sont unitaires.

Exercice 4. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{D} \,|\, f'(0) = 0\}$$

est un sous-anneau de $\mathcal{D}$ mais pas un idéal de $\mathcal{D}$.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif que l'on ne suppose pas unitaire.

1. On munit $A \times \mathbb{Z}$ des lois de composition interne

$$+\colon \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + a_2, n_1 + n_2) \end{array}$$

   et

$$.\ \colon \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (n_2.a_1 + n_1.a_2 + a_1.a_2\ ,\ n_1.n_2) \end{array}.$$

   Montrer que $(A \times \mathbb{Z}, +, \ .\ )$ est un anneau unitaire.
2. Montrer que tout anneau se plonge dans un anneau unitaire, c'est-à-dire que, pour tout anneau A, il existe un anneau $\mathcal{A}$ unitaire et un monomorphisme d'anneaux $f : A \to \mathcal{A}$.

Exercice 6. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_\Omega := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, f(x) = 0\big\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^0_\Omega := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est un sous-ensemble fini de $\Omega\big\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\Omega$ et $\mathcal{F}^0_\Omega$ sont des idéaux de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout idéal I de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe un unique $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}^0_\Omega \subset I \subset \mathcal{F}_\Omega$.
   Indication : on pourra remarquer (et prouver) qu'alors, toutes les fonctions de I s'annulent en-dehors de Ω, et que pour tout $x \in \Omega$, I contient les fonctions qui s'annulent partout sauf en x.