Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 3 – Anneaux : morphismes et idéaux – Corrigé TD1

Exercice 1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(3) \end{array} \right.$ *. Montrer que f est un morphisme d'anneaux et déterminer son noyau et son image.*

Remarque préliminaire : cet exercice arrive un peu tôt dans le cours et sera à revoir après le chapitre sur les polynômes.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes. Par définition de la somme et du produit de polynômes, on a $(P + Q)(X) := P(X) + Q(X)$ et $(P.Q)(X) := P(X).Q(X)$ et donc $f(P + Q) = (P + Q)(3) = P(3) + Q(3) = f(P) + f(Q)$, ainsi que $f(P.Q) = (P.Q)(3) = P(3).Q(3) = f(P).f(Q)$. L'application f est donc bien un morphisme d'anneaux.

Le noyau de f correspond à tous les polynômes s'annulant en 3. Nous verrons qu'il s'agit des polynômes de la forme $P.(X - 3)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f) = (X - 3)$, l'idéal engendré par $X - 3$.

L'image de f est égal à $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $P_a(3) = a$ en posant $P_a(X) = X - 3 + a$, et donc $a = P_a(3) \in \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2. *Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'application*

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & n\mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k.n \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes, mais n'est pas un morphisme d'anneaux.

Remarque préliminaire : la multiplication ne munissant pas $\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe, c'est l'addition qu'il faut considérer ici.

Pour tout $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, on a $\psi(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2).n = k_1.n + k_2.n = \psi(k_1) + \psi(k_2)$, il s'agit donc bien d'un morphisme de groupes. Celui-ci est surjectif car, pour tout $nk \in n\mathbb{Z}$, on a bien $nk = \psi(k) \in \mathrm{Im}(\psi)$. Il est également injectif car si $\psi(k) = k.n = 0$, alors par intégrité de $\mathbb{Z}$ et puisque $n \neq 0$, on a $k = 0$; on en déduit que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$. L'application ψ est donc bien un isomorphisme de groupes.

Par contre, on a $\psi(1.1) = \psi(1) = k \neq k^2 = \psi(1).\psi(1)$, ça n'est donc pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 3. *Soit A_1 et A_2 deux anneaux. On suppose que A_1 est unitaire et qu'il existe un épimorphisme d'anneaux $f : A_1 \to A_2$. Montrer que A_2 et f sont unitaires.*

Si f est unitaire, alors $f(1_{A_1}) = 1_{A_2}$. Montrons donc que l'image de 1_{A_1} par f est un élément unité pour A_2, nous obtiendront ainsi simultanément les caractères unitaires de A_2 et de f. Pour cela on considère un élément quelconque $a_2 \in A_2$. Puisque f est surjective, il existe $a_1 \in A_1$ tel que $f(a_1) = a_2$; on a alors

$$a_2.f(1_{A_1}) = f(a_1).f(1_{A_1}) = f(a_1.1_{A_1}) = f(a_1) = a_2$$

ainsi que

$$f(1_{A_1}).a_2 = f(1_{A_1}).f(a_1) = f(1_{A_1}.a_1) = f(a_1) = a_2.$$

L'élément $f(1_{A_1})$ est donc bien une unité pour A_2.

Exercice 4. *On note $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{D} \,|\, f'(0) = 0\}$$

est un sous-anneau de $\mathcal{D}$ mais pas un idéal de $\mathcal{D}$.

Montrons que $\mathcal{D}_0$ satisfait les trois axiomes des sous-anneaux :

- $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ car il contient, par exemple, la fonction nulle ou la fonction constante égale à 1 ;
- soit $f, g \in \mathcal{D}_0$, alors $f'(0) = g'(0) = 0$ et donc
  - $(f-g)'(0) = f'(0) - g'(0) = 0$, montrant que $f - g \in \mathcal{D}_0$;
  - $(f.g)'(0) = f(0).g'(0) + f'(0).g(0) = f(0).0 + 0.g(0) = 0$, montrant que $f.g \in \mathcal{D}_0$.

Par contre, $\mathcal{D}_0$ n'est pas un idéal. En effet, nous avons dit plus haut que $\mathcal{D}_0$ contient la fonction constante égale à 1 ; si c'était un idéal, il contiendrait alors, par exemple, le produit de celle-ci avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, laquelle n'a pourtant pas une dérivée qui s'annule en 0.

Exercice 5. *Soit A un anneau commutatif que l'on ne suppose pas unitaire.*

Remarque préliminaire : on rappelle que, par définition de la notation additive, pour tout $a \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$n.a := \begin{cases} a + a + \cdots + a \ n \text{ fois si } n > 0 \\ 0_A \text{ si } n = 0 \\ (-a) + (-a) + \cdots + (-a) \ |n| \text{ fois si } n < 0 \end{cases} .$$

1. *On munit $A \times \mathbb{Z}$ des lois de composition interne*

$$+ : \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + a_2, n_1 + n_2) \end{array}$$

et

$$. : \begin{array}{ccc} (A \times \mathbb{Z}) \times (A \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, n_1), (a_2, n_2)\big) & \longmapsto & (n_2.a_1 + n_1.a_2 + a_1.a_2 \ , \ n_1.n_2) \end{array} .$$

Montrer que $(A \times \mathbb{Z}, +, \ . \ )$ est un anneau unitaire.

Montrons tous les axiomes requis.

$(A \times \mathbb{Z}, +)$ **est un groupe abélien :** en effet, l'addition

- est associative car, pour tous $(a_1, n_1), (a_2, n_2), (a_3, n_3) \in A \times \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} (a_1, n_1) + \big((a_2, n_2) + (a_3, n_3)\big) &= \big(a_1 + (a_2 + a_3), n_1 + (n_2 + n_3)\big) \\ &= \big((a_1 + a_2) + a_3, (n_1 + n_2) + n_3\big) \\ &= \big((a_1, n_1) + (a_2, n_2)\big) + (a_3, n_3) \end{aligned}$$

  par associativité de $(A, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$;
- possède un élément neutre, à savoir $(0_A, 0)$ car, pour tout $(a, n) \in A \times \mathbb{Z}$, on a

$$(a, n) + (0_A, 0) = (a + 0_A, n + 0) = (a, n) = (0_A + a, 0 + n) = (0_A, 0) + (a, n) \ ;$$

- possède un inverse pour tout élément car, pour tout $(a, n) \in A \times \mathbb{Z}$, on a

$$(a, n) + (-a, -n) = (a - a, n - n) = (0_A, 0) = (-a + a, -n + n) = (-a, -n) + (a, n) \ ;$$

- est commutative, car , pour tout $(a_1, n_1), (a_2, n_2) \in A \times \mathbb{Z}$, on a

$$(a_1, n_1) + (a_2, n_2) = (a_1 + a_2, n_1 + n_2) = (a_2 + a_1, n_2 + n_1) = (a_2, n_2) + (a_1, n_1)$$

  par commutativité de $(A, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$;

$(A\times\mathbb{Z},\ .\ )$ est commutatif : cela n'est pas demandé mais cela évitera de faire deux fois le même calcul pour les points suivants. On a en effet, pour tous $(a_1,n_1),(a_2,n_2)\in A\times\mathbb{Z}$,

$$(a_1,n_1).(a_2,n_2)=\big(n_2.a_1+n_1.a_2+a_1.a_2\ ,\ n_1n_2\big)=\big(n_1.a_2+n_2.a_1+a_2.a_1\ ,\ n_2n_1\big)=(a_2,n_2).(a_1,n_1)$$

puisque A et $\mathbb{Z}$ sont tous les deux des anneaux commutatifs ;

$(A\times\mathbb{Z},\ .\ )$ est associatif : en effet, pour tous $(a_1,n_1),(a_2,n_2),(a_3,n_3)\in A\times\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{array}{rcl}(a_1,n_1).\big((a_2,n_2).(a_3,n_3)\big) & = & (a_1,n_1).\big(n_3.a_2+n_2.a_3+a_2.a_3,n_2n_3\big)\\ & = & n_2n_3.a_1+n_1.(n_3.a_2+n_2.a_3+a_2.a_3)+a_1.(n_3.a_2+n_2.a_3+a_2.a_3)\ ,\ n_1n_2n_3\big)\\ & = & \Big(n_2n_3.a_1+n_3n_1.a_2+n_1n_2.a_3+n_1.(a_2.a_3)+n_2.(a_3.a_1)+n_3.(a_1.a_2)+a_1.a_2.a_3\ ,\ n_1n_2n_3\big).\end{array}$$

Cette dernière formule est invariante par permutation cyclique des indices. On a donc

$$(a_1,n_1).\big((a_2,n_2).(a_3,n_3)\big)=(a_3,n_3).\big((a_1,n_1).(a_2,n_2)\big)=\big((a_1,n_1).(a_2,n_2)\big).(a_3,n_3)$$

par commutativité de $\ .\ $;

$(A\times\mathbb{Z},+,\ .\ )$ est distributif : en effet, pour tous $(a_1,n_1),(a_2,n_2),(a_3,n_3)\in A\times\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{array}{rcl}(a_1,n_1).\big((a_2,n_2)+(a_3+n_3)\big) & = & (a_1,n_1).(a_2+a_3,n_2+n_3)\\ & = & (n_2+n_3).a_1+n_1.(a_2+a_3)+a_1.(a_2+a_3)\\ & = & n_2.a_1+n_3.a_1+n_1.a_2+n_1.a_3+a_1.a_2+a_1.a_3\\ & = & n_2.a_1+n_1.a_2+a_1.a_2+n_3.a_1+n_1.a_3+a_1.a_3\\ & = & (a_1,n_1).(a_2,n_2)+(a_1,n_1).(a_3,n_3)\end{array}$$

ainsi que, par commutativité de $\ .\ $:

$$\begin{array}{rcl}\big((a_2,n_2)+(a_3+n_3)\big).(a_1,n_1) & = & (a_1,n_1).\big((a_2,n_2)+(a_3+n_3)\big)\\ & = & (a_1,n_1).(a_2,n_2)+(a_1,n_1).(a_3,n_3)\\ & = & (a_2,n_2).(a_1,n_1)+(a_3,n_3).(a_1,n_1)\ ;\end{array}$$

$(A\times\mathbb{Z},+,\ .\ )$ est unitaire : l'élément unité étant $(0_A,1)$. En effet, pour tout $(n,a)\in A\times\mathbb{Z}$, on a $(n,a).(0_A,1)=(0_A,1).(n,a)=(n.0_A+1.a+0_A.a,1.n)=(a,n)$.

2. *Montrer que tout anneau se plonge dans un anneau unitaire, c'est-à-dire que, pour tout anneau A, il existe un anneau $\mathcal{A}$ unitaire et un monomorphisme d'anneaux $f:A\to\mathcal{A}$.*

D'après la question précédente, $A\times\mathbb{Z}$ est muni d'une structure d'aaneau unitaire par les opérations ci-dessus. Il suffit donc de montrer que l'application

$$\varphi:\begin{array}{ccc}A & \longrightarrow & A\times\mathbb{Z}\\ a & \longmapsto & (a,0)\end{array}$$

est un monomorphisme d'anneaux. Or, pour tout $a_1,a_2\in A$, on a

$$\varphi(a_1+a_2)=(a_1+a_2,0)=(a_1,0)+(a_2,0)=\varphi(a_1)+\varphi(a_2)$$

ainsi que

$$\varphi(a_1.a_2)=(a_1.a_2,0)=(0.a_1+0.a_2+a_1.a_2,0.0)=(a_1,0).(a_2,0)=\varphi(a_1).\varphi(a_2).$$

L'application φ est donc un morphisme d'anneaux. De plus, pour tout $a\in\operatorname{Ker}(\varphi)$, on a $(0_A,0)=\varphi(a)=(a,0)$ et donc $a=0_A$; on en déduit que $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{0_A\}$ et donc que φ est injective. Au final, φ est bien un monomorphisme d'anneaux, montrant que A est isomorphe à un sous-anneau de l'anneau unitaire $A\times\mathbb{Z}$.

Exercice 6. *Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_\Omega := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, f(x) = 0\big\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^0_\Omega := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est un sous-ensemble fini de $\Omega\big\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que, pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\Omega$ et $\mathcal{F}^0_\Omega$ sont des idéaux de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

   On fixe $\Omega \subset \mathbb{R}$. Commençons par $\mathcal{F}_\Omega$.
   - L'ensemble $\mathcal{F}_\Omega$ est non vide car il contient l'application nulle.
   - Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\Omega$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, on a $f_1(x) = f_2(x) = 0$ et donc $f_1(x) - f_2(x) = 0$, montrant que $f_1 - f_2 \in \mathcal{F}_\Omega$, et donc que $\mathcal{F}_\Omega$ est un sous-groupe de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour l'addition.
   - Soit $f \in \mathcal{F}_\Omega$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, on a $f(x) = 0$ et donc $f(x)g(x) = 0$, montrant que $f.g \in \mathcal{F}_\Omega$.

   Le sous-ensemble $\mathcal{F}_\Omega$ est donc bien un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   Passons maintenant à $\mathcal{F}^0_\Omega$.
   - L'ensemble $\mathcal{F}^0_\Omega$ est non vide car il contient l'application nulle.
   - Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}^0_\Omega$. Les ensembles $A_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) \neq 0\}$ et $A_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) \neq 0\}$ sont donc des sous-ensembles finis de Ω. Notons $A_0 = A_1 \cup A_2$, qui est aussi un sous-ensemble fini de Ω. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A_0$, on a $f_1(x) = f_2(x) = 0$ et donc $f_1(x) - f_2(x) = 0$. En particulier $\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) - f_2(x) \neq 0\} \subset A_0$. C'est donc lui encore un sous-ensemble fini de Ω, montrant que $f_1 - f_2 \in \mathcal{F}^0_\Omega$, et donc que $\mathcal{F}^0_\Omega$ est un sous-groupe de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour l'addition.
   - Soit $f \in \mathcal{F}_\Omega$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est donc un sous-ensemble fini de Ω. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A$, on a $f(x) = 0$ et donc $f(x)g(x) = 0$. En particulier $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)g(x) \neq 0\} \subset A$. C'est donc lui aussi un sous-ensemble fini de Ω, montrant que $f.g \in \mathcal{F}^0_\Omega$.

2. *Montrer que pour tout idéal I de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe un unique $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}^0_\Omega \subset I \subset \mathcal{F}_\Omega$.*

   On pose $\Omega = \cup_{f \in I}\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$, la réunion de tous les $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une fonction dans I ne s'annulant pas en ce x. A contrario, toutes les fonctions dans I s'annulent en tous les $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$. On a donc $I \subset \mathcal{F}_\Omega$.

   Considérons maintenant $g \in \mathcal{F}^0_\Omega$. Cette fonction s'annule donc partout sauf en un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_\ell \in \Omega$. Par définition de Ω, pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, il existe donc $f_i \in I$ telle que $f_i(x_i) \neq 0$. Mais puisque I est un idéal, I contient également la fonction $f_i.h_i$ où $h_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la fonction qui s'annule partout sauf en x_i où elle vaut $\frac{g(x_i)}{f_i(x_i)}$; de fait $f_i.h_i$ est la fonction qui s'annule partout sauf en x_i où elle vaut $g(x_i)$. Mais, toujours parceque I est un idéal, la fonction $h_0 := \sum_{i=1}^{\ell} h_i$ est alors aussi dans I. Or, par construction, on a h_0 qui vaut $f_i(x_i).\frac{g(x_i)}{f_i(x_i)} = g(x_i)$ en x_i pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, et qui s'annule partout ailleurs, tout comme g. On a donc $g = h_0 \in I$, ce qui montre l'inclusion $\mathcal{F}^0_\Omega \subset I$.

   Montrons maintenant l'unicité de Ω en supposant l'existence d'un autre sous-ensemble $\Omega' \subset \mathbb{R}$ vérifiant les mêmes propriétés. Soit $x \in \Omega'$. La fonction f_x s'annulant partout sauf en x où elle vaut 1 est dans $\mathcal{F}_{\Omega'} \subset I \subset \mathcal{F}_\Omega$. En particulier, $x \in \Omega$ puisqu'il existe une fonction dans $\mathcal{F}_\Omega$ ne s'annulant pas en x. Cela montre que $\Omega' \subset \Omega$, et un argument similaire montre que $\Omega \subset \Omega'$. On a donc $\Omega' = \Omega$, montrant bien l'unicité de Ω.