

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 3 – TD2 – ANNEAUX : MORPHISMES ET IDÉAUX

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0_A\}$ des éléments nilpotents est un idéal de A .

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire et I un idéal de A . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. $I = A$;
- ii. I est un sous-anneau unitaire de A ;
- iii. $1_A \in I$;
- iv. I contient un élément inversible.

Exercice 3. En considérant l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(i) \end{array},$$

montrer que $\mathbb{C}$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

Remarque : si vous ne connaissez pas encore la notion de division euclidienne pour les polynôme, vous pourrez admettre que $\text{Ker}(f) = (X^2 + 1)$.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et qu'il est engendré par n .
2. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$ non réduit à 0.
 - (a) Montrer que l'ensemble $I \cap \mathbb{N}^*$ admet un minimum. On le note n .
 - (b) Montrer que $I = (n)$.
3. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Déterminer $(m) \cap (n)$ et $(m) + (n)$.

Exercice 5. On considère $\ell(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et on note

- $\ell_C(\mathbb{Q}) := \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \geq N \Rightarrow |u_{n_2} - u_{n_1}| < \frac{1}{k}\}$ le sous-ensemble des suites *de Cauchy*;
 - $\ell_0(\mathbb{Q}) := \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{k}\}$ le sous-ensemble des suites *convergeant vers 0*.
1. (a) Montrer que tout élément de $\ell_C(\mathbb{Q})$ est une suite bornée.
(b) En déduire que $\ell_C(\mathbb{Q})$ est un sous-anneau de $\ell(\mathbb{Q})$.
 2. Montrer que $\ell_0(\mathbb{Q})$ est un idéal de $\ell_C(\mathbb{Q})$.
 3. (a) Montrer qu'une suite dans $\ell_C(\mathbb{Q})$ converge dans $\mathbb{R}$.
(b) En considérant l'application

$$\lambda: \begin{array}{ccc} \ell_C(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \end{array},$$

montrer que $\ell_C(\mathbb{Q})/\ell_0(\mathbb{Q})$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbb{R}$.