Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 4 – TD2 – POLYNÔMES : GÉNÉRALITÉS

Préliminaire : Soit $\mathbb{K}$ un corps (pensez $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). En anticipant un peu sur la suite, on définira pour tout $P := a_0 + a_1X + a_2X + \cdots + a_nX^n\mathbb{K}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$ la quantité $P(\alpha) \in \mathbb{K}$ par $P(\alpha) := a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n$. Ainsi, pour $P := 1+2X-2X^2+X^3$, on aura par exemple $P(1) = 1+2-2+1 = 2$ ou $P(-2) = 1 + 2.(-2) - 2.4 + (-2)^3 = -19$.

De la même manière, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définira $P(Q) := a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \cdots + a_nQ^n$. Pour $P = 1 - X + X^2$, on aura par exemple $P(X + 1) = 1 - (X + 1) + (X + 1)^2 = 1 + X + X^2$ ou $P(X^2) = 1 - X^2 + X^4$.

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3 :

1. vérifiant $P(1) = P(2) = 0$;
2. vérifiant $P(1) = P(2) = 1$.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
Indication : on pourra commencer par déterminer le degré d'un polynôme solution.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Montrer que toute famille de polynômes $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ forme une base du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_n$.

Exercice 4. On considère l'application

$$\Delta\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Montrer que Δ est une application linéaires (entre espaces vectoriels).
2. (a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré non nul, on a $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.
   (b) En déduire le noyau de Δ.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}[X]_{n-1}$, où $\Delta^n := \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n := \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!}$, ainsi que $T_0 = 1$.
   (a) Montrer que la famille $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ dans le sens ou toute sous-famille finie est libre, et que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de cette famille.
   Indication : on pourra s'aider de l'exercice 3.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta(T_n)$ puis $\Delta^p(T_n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que l'application $c_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, envoyant tout polynôme sur son coefficient constant, est linéaire.
   (d) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de T_n dans la décomposition de P dans la base $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut $c_0\big(\Delta^n(P)\big)$, où par convention $\Delta^0 := \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$. Autrement dit, montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_n$, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_0\big(\Delta^k(P)\big)T_k.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$\Delta^k(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i) \in \mathrm{Vect}\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big).$$

   (b) Montrer que $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$.
   Indication : on pourra utiliser l'exercice 3.